CIMAT

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS, A.C.

9ª OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICAS PARA ALUMNOS DE SECUNDARIA

Primera Etapa

7 de marzo de 2009

NIVEL 2 y 3

SOLUCIONES:

1. Se sabe que uno de cada 3 alumnos de una escuela juega basquetbol, uno de cada 2 juega futbol, uno de cada 5 juega ajedrez y uno de cada 7 juega hockey. Además no hay un alumno que juegue tanto futbol como ajedrez. Si en dicha escuela hay 210 alumnos, ¿cuál es el máximo número de alumnos que no practican ninguna de éstas actividades?

   La respuesta es ***63* alumnos**.
   Notemos que en la escuela hay *105*, *70*, *42* y *30* alumnos que practican fútbol, básquetbol, ajedrez y hockey respectivamente. Sabemos que los *42* alumnos que practican ajedrez no juegan fútbol, por lo que hay *147* alumnos que practican alguna de estas dos actividades. Los alumnos que practican hockey y básquetbol pueden estar entre estos *147* alumnos, por lo que es posible que los *63* alumnos restantes no practiquen ninguna actividad.

2. Doña Rosita tiene 3 podadoras. Con una de ellas tarda 2 horas en podar el césped de su jardín, mientras que con la otra le toma 1 hora y 15 minutos realizar el mismo trabajo y la última tarda 1 hora. Si se usan las tres podadoras al mismo tiempo, ¿cuánto tiempo tardará en podar el césped?

   La respuesta es ***600/23* minutos**, aproximadamente *26.08*.
   Las podadoras podan en 15 minutos $1/8$, $1/5$ y $1/4$ del jardín respectivamente. Luego, en 15 minutos las tres podadoras pueden podar $1/8+1/5+1/4=23/40$ del jardín. Por lo tanto, para terminar de podar el jardín necesitan $40/23$ veces este tiempo. $15 \times 40/23=600/23$.

3. Se tienen dos dados. En las caras de uno de ellos aparecen los números 2, 4, 8, 16, 32 y 64, mientras que en las caras del otro aparecen los números del 1 al 6. Tiramos los dados y multiplicamos los dos números que obtengamos. ¿Cuál es la probabilidad de que esta multiplicación sea un cuadrado perfecto?

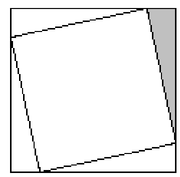
   La probabilidad es ***1/4***.
   Hay en total *36* posibles resultados al tirar los dados. Luego, los únicos resultados que generan un cuadrado perfecto son: $\{1,4\}$, $\{1,16\}$, $\{1,64\}$, $\{2,2\}$, $\{2,8\}$, $\{2,32\}$, $\{4,4\}$, $\{4,16\}$, $\{4,64\}$. Entonces la probabilidad de que caiga alguna de las combinaciones anteriores es $9/36= 1/4$.

4. Tenemos 11 focos apagados alrededor de un círculo. Los focos están numerados del 1 al 11. Samuel se pone a dar vueltas alrededor del círculo, iniciando con el foco 1, presionando el interruptor de cada foco de manera alternada, es decir, uno sí y uno no. Cada vuelta termina cuando pasa del foco número

11 al número 1, independientemente de si presiona cualquiera de los interruptores. Después de 2009 vueltas, ¿qué focos están encendidos?

Los focos encendidos son el *1, 3, 5, 7, 9 y 11*.
Notemos que en la primera vuelta Samuel enciende los focos *1, 3, 5, 7, 9 y 11*; en la segunda vuelta enciende los focos *2, 4, 6, 8 y 10*; en la tercera vuelta apaga los focos *1, 3, 5, 7, 9 y 11*; y en la cuarta vuelta apaga los focos *2, 4, 6, 8 y 10*. Es decir después de cada 4 vueltas volvemos al estado original. Así después de *2008* vueltas todos los focos estarán apagados, y en la siguiente vuelta encenderá los focos con número impar.

5. En la figura, se muestran dos cuadrados, uno metido en el otro. El cuadrado grande tiene área de 49 cm^2 y el cuadrado pequeño tiene área de 25 cm^2. ¿Cuál es el perímetro del triángulo sombreado?



El perímetro del área sombreada es *12 cm*.
Como el área del cuadro grande es *49* cm^2 y la del cuadrado pequeño es *25* cm^2, entonces miden de lado *7* cm y *5* cm respectivamente. Luego, notemos que la base y la altura del triángulo sombreado suman *7* cm. Así el perímetro del triángulo sombreado es $7+5 = 12$ *cm*.

6. La suma de 111 enteros consecutivos es 3441. ¿Cuál es el mayor entero sumado?

La respuesta es ***86***.
Si consideramos que a es el entero mayor, entonces los *111* enteros sumados serán $a, a-1, a-2, \ldots a-110$.
La suma de estos enteros es:
$a+(a-1)+(a-2)+\ldots+(a-110) = a+a+\ldots+a-(1+2+3+\ldots+110) = 111a-110 \times 111/2= 111(a-55) = 3441$.
Dividiendo por *111*, tenemos la igualdad $a-55=31$. Luego $a=86$.

7. Las familias Sánchez y Rodríguez se encuentran en la calle. En seguida se produce un efusivo intercambio de besos y abrazos. Cada miembro de cada familia saluda a todos los miembros de la otra. Cuando dos miembros se saludan, se dan un abrazo. Además, cada mujer de cada familia le dio un beso en la mejilla a cada miembro de la otra familia (de forma que cuando se saludan dos mujeres además del abrazo, se dan dos besos). Alguien cuenta 49 abrazos y 56 besos. ¿Cuántas mujeres hay?

La respuesta es ***8* mujeres.**
Notemos que el número de abrazos es igual al producto de los números de integrantes de cada familia. Como este número es *49* debe haber *7* miembros en cada familia. (Que una familia tenga un integrante y la otra tenga *49* se descarta porque hay *56* besos). Ahora, cada mujer besa a cada miembro de la otra familia una vez, por lo cual, si m y n son el número de mujeres en cada familia
$7 \times m + 7 \times n = 7 \times (m+n) = 56$
Luego, tenemos que $m+n=8$ el total de mujeres es de *8*.

8. Sobre una viga caminan varios gatos, con la peculiaridad de que al encontrarse dos de ellos cambian su dirección. Si cada gato recorre media viga por minuto y hay un gato en cada extremo de la viga, los cuales caminan hacia el centro. ¿Cuánto tiempo tarda en caerse el último gato de la viga?

La respuesta es **2 minutos**.

Notemos que cuando dos gatos se encuentran, podemos considerar como si no cambiaran de dirección, debido a que invariantemente queda un gato caminando en cada dirección y sólo nos interesa el tiempo en que tardan en caer todos los gatos. Si los gatos no cambiaran de dirección, independientemente del número de gatos, todos los gatos que no se encuentren en los extremos tardarían menos de 2 minutos en pasar por toda la viga, por lo que caerían antes de los dos minutos. Además, los gatos que se encuentran en los extremos tardarán exactamente 2 minutos en caer, así que este será el tiempo que tardarán en caer los gatos.

9. En la siguiente igualdad, a y b representan dígitos. ¿Cuáles deben ser los valores de a y b para que la igualdad esté correcta?

$$aba/1b8=3$$

La respuesta es $a=b=4$

Notamos que cualquiera que sea el valor de b al multiplicar un número terminado en 8 por 3, el resultado terminará en 4 por lo que $a=4$. Luego, tenemos la ecuación $4b4=3 \times 1b8$. Escribiendo esto en notación desarrollada tenemos que

$4b4 = 400+ 10 \times b + 4 =300+ 30 \times b + 24 = 3 \times 1b8$.

De aquí, podemos despejar $20 \times b = 80$ esto es $b=4$.

10. Se tiene un trapecio formado por tres triángulos isósceles, iguales entre sí, en el que el lado igual tiene longitud 13 cm. Si el perímetro del trapecio es 56 cm, ¿cuánto mide la altura del triángulo?

La respuesta es **12cm.**

El perímetro del trapecio es igual a dos veces el lado igual de los triángulos isósceles mas tres veces el lado distinto de donde se deduce que el lado distinto mide 10 cm. Bajando la altura de uno de los triángulos iscóceles obtenemos dos triángulos rectángulos en los cuales, la base mide 5cm y la hipotenusa 13cm. Aplicando el Teorema de Pitágoras encontramos que la altura mide 12cm.