CIMAT

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS, A.C.

9ª OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICAS PARA ALUMNOS DE SECUNDARIA

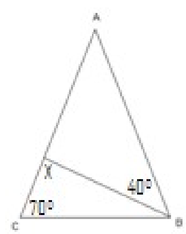
Primera Etapa

7 de marzo de 2009

NIVEL 1

SOLUCIONES:

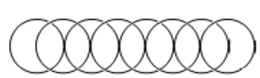
1. Sea ABC un triángulo isósceles con los lados AC y AB iguales como se muestra en la figura. ¿Cuánto mide el ángulo x?



El ángulo mide **80º.**

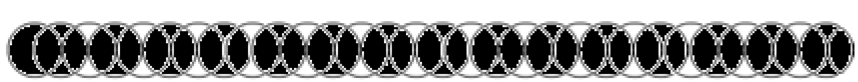
Llamemos P al punto el cual es el vértice del ángulo x. Como el triángulo ABC es isósceles y AC = AB, entonces los ángulos ABC y ACB son iguales y miden 70º. Luego, el ángulo CBP mide 30º. Finalmente, como la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º, obtenemos que el ángulo x mide 80º.

2. Se tiene una cadena formada por 30 eslabones circulares del mismo tamaño. Cada eslabón tiene 3 cm de radio. Colocamos la cadena sobre el suelo como se muestra en la figura. ¿Cuál es la longitud de la cadena?



La cadena mide **93 cm**.

Notemos que para calcular la longitud de la cadena, basta calcular cuánto mide la cadena formada por los círculos negros de la siguiente figura:



Tenemos *15* círculos completos y medio círculo, entonces tenemos *31* radios en total.

Como cada radio mide *3* cm, entonces la cadena mide *93* cm.

3. Se sabe que uno de cada 3 alumnos de una escuela juega basquetbol, uno de cada 2 juega futbol, uno de cada 5 juega ajedrez y uno de cada 7 juega hockey. Además no hay un alumno que juegue tanto futbol como ajedrez. Si en dicha escuela hay 210 alumnos, ¿cuál es el máximo número de alumnos que no practican ninguna de éstas actividades?

   La respuesta es ***63* alumnos**.
   Notemos que en la escuela hay *105*, *70*, *42* y *30* alumnos que practican fútbol, básquetbol, ajedrez y hockey respectivamente. Sabemos que los *42* alumnos que practican ajedrez no juegan fútbol, por lo que hay *147* alumnos que practican alguna de estas dos actividades. Los alumnos que practican hockey y básquetbol pueden estar entre estos *147* alumnos, por lo que es posible que los *63* alumnos restantes no practiquen ninguna actividad.

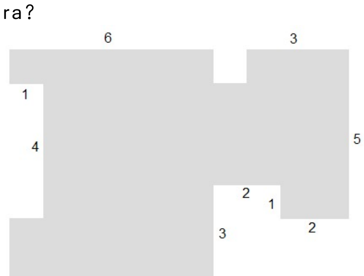
4. Doña Rosita tiene 2 podadoras. Con una de ellas tarda 1 hora en podar el césped de su jardín, mientras que con la otra le toma 45 minutos realizar el mismo trabajo. Si se usan ambas podadoras al mismo tiempo, ¿cuánto tiempo tardará en podar el césped?

   La respuesta es ***180/7* minutos**, aproximadamente *25.71*.
   La podadora más lenta poda *1/4* del jardín en *15* minutos. La más rápida poda *1/3* del jardín en el mismo tiempo. Luego, en *1*5 minutos las dos podadoras pueden podar *1/4+1/3=7/12* del jardín. Por lo tanto, para terminar de podar el jardín necesitan 12/7 veces este tiempo. *15 x 12/7=180/7*.

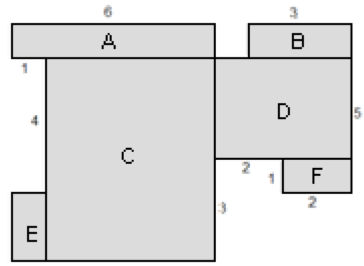
5. Se tienen dos dados. En las caras de uno de ellos aparecen los números 2, 4, 8, 16, 32 y 64, mientras que en las caras del otro aparecen los números del 1 al 6. Tiramos los dados y multiplicamos los dos números que obtengamos. ¿Cuál es la probabilidad de que esta multiplicación sea un cuadrado perfecto?

   La probabilidad es ***1/4***.
   Hay en total *36* posibles resultados al tirar los dados. Luego, los únicos resultados que generan un cuadrado perfecto son: *{1,4}*, *{1,16}*, *{1,64}*, *{2,2}*, *{2,8}*, *{2,32}*, *{4,4}*, *{4,16}*, *{4,64}*. Entonces la probabilidad de que caiga alguna de las combinaciones anteriores es *9/36= 1/4* .

6. ¿Cuál es el área de la siguiente figura?



   El área sombreada es de **55**.
   Notemos que podemos dividir la figura en los siguientes rectángulos y calcular el área de cada uno por separado.

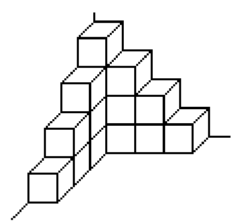


El área de A = 6x1 = 6.
El área de B = 3x1 = 3.
El área de C = 5x6 = 30.
El área de D = 4x3 = 12.
El área de E = 1x2 = 2.
El área de F = 2x1 = 2.
Por lo tanto el área total es de 6+3+30+12+2+2 = 55.

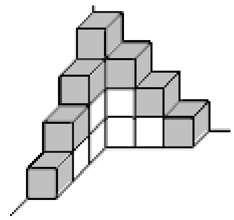
7. Tenemos 7 focos apagados alrededor de un círculo. Los focos están numerados del 1 al 7. Samuel se pone a dar vueltas alrededor del círculo, iniciando con el foco 1, presionando el interruptor de cada foco de manera alternada, es decir, uno sí y uno no. Cada vuelta termina cuando pasa del foco número 7 al número 1, independientemente de si presiona cualquiera de los interruptores. Después de 2009 vueltas, ¿qué focos están encendidos?

   Los focos encendidos son el 1, 3, 5 y 7.
   Notemos que en la primera vuelta Samuel enciende los focos 1, 3, 5 y 7; en la segunda vuelta enciende los focos 2, 4 y 6; en la tercera vuelta apaga los focos 1, 3, 5 y 7; y en la cuarta vuelta apaga los focos 2, 4 y 6. Es decir después de cada 4 vueltas volvemos al estado original. Así después de 2008 vueltas todos los focos estarán apagados, y en la siguiente vuelta encenderá los focos con número impar.

8. Un grupo de cubitos con forma de "escalera" están apilados contra una esquina, de manera que en cada nivel hay un cubito más en cada lado. En la figura, se muestra una "escalera" con cuatro niveles. En ella son visibles 27 de las caras de los cubitos. ¿Cuántos cubitos serán visibles si la "escalera" tuviera 10 niveles?



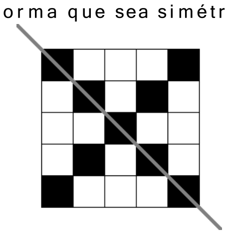
   La respuesta es **129 caras**.
   Los cada cubito en los extremos, coloreados de gris tienen 3 caras visibles. En una pirámide con 10 niveles, habría 19 cubitos de estos, por lo que contabilizaríamos 57 caras entre estos cubitos. Los cubitos restantes, tienen una cara visible. En el tercer nivel hay dos de estos cubitos. En el cuarto nivel hay cuatro. En el quinto nivel habrá seis y así sucesivamente hasta el nivel 10 en el que habrá 16 de estos cubitos. Esta suma nos da como resultado 2+4+6+8+…+16=2 x (1+2+3+…+8)=8 x 9=72 cubitos y por tanto 72 caras visibles. En total habría 57+72=129.



9. Sobre una viga caminan diez gatos, con la peculiaridad de que al encontrarse dos de ellos cambian su dirección. Si cada gato recorre media viga por minuto y hay un gato en cada extremo de la viga, los cuales caminan hacia el centro. ¿Cuánto tiempo tarda en caerse el último gato de la viga?

   La respuesta es **2 minutos**.
   Notemos que cuando dos gatos se encuentran, podemos considerar como si no cambiaran de dirección, debido a que invariantemente queda un gato caminando en cada dirección y sólo nos interesa el tiempo en que tardan en caer todos los gatos. Si los gatos no cambiaran de dirección, independientemente del número de gatos, todos los gatos que no se encuentren en los extremos tardarían menos de 2 minutos en pasar por toda la viga, por lo que caerían antes de los dos minutos. Además, los gatos que se encuentran en los extremos tardarán exactamente 2 minutos en caer, así que este será el tiempo que tardarán en caer los gatos.

10. Cada uno de los cuadros en blanco de la siguiente figura se quiere colorear de azul o rojo. ¿De cuántas formas puede colorearse la figura de tal forma que sea simétrica con respecto al eje marcado?



   Se puede colorear de **256 formas**.
   Notemos que basta colorear un lado de la figura y el otro colorearlo de la misma forma para que el dibujo sea simétrico. Como tenemos 8 cuadritos en cada lado y cada uno puede colorearse de 2 colores distintos, entonces esos 8 cuadritos pueden pintarse de $2^8 = 256$ formas.