

## Examen Individual

### Nivel III

Estado: -----

Nombre: -----

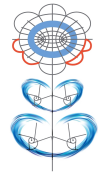
#### Instrucciones:

- El examen consta de dos partes:
  - Parte A
    - \* Consta de 12 problemas con un valor de 5 puntos cada una.
    - \* En estos problemas, sólo se toma en cuenta la respuesta final, que debe ser claramente escrita en el espacio correspondiente en cada problema y en la hoja de respuestas.
    - \* No se darán puntos parciales y no hay penalizaciones por respuestas incorrectas.
    - \* Para las preguntas con varias respuestas, se darán los 5 puntos sólo si todas las respuestas correctas están escritas y sólo ellas.
  - Parte B
    - \* Consta de 3 problemas de redacción libre y con un valor de 20 puntos cada uno.
    - \* En estos problemas es posible acumular puntos parciales.

- En caso de que las respuestas a los problemas no sean enteras, estas deben ser aproximadas a dos decimales tomando en cuenta los siguientes valores:

$$\pi = 3.14, \quad \sqrt{2} = 1.41, \quad \sqrt{3} = 1.73, \quad \sqrt{5} = 2.23.$$

- Las figuras mostradas, podrían no estar a escala.
- No está permitido el uso de calculadoras, transportadores y aparatos electrónicos.
- La duración del examen es **2 horas**.



Estado: -----

Nombre: -----

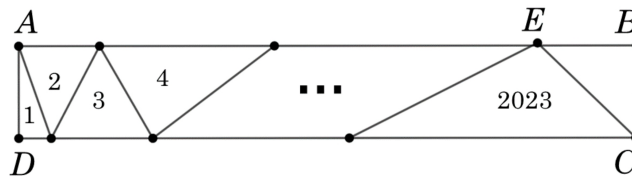
1.	7.
2.	8.
3.	9.
4.	10.
5.	11.
6.	12.

PARTE A

**Problema 1.** ¿Cuántos enteros positivos de cuatro dígitos  $\overline{abcd}$ , cumplen que el número  $\overline{cd}$  es múltiplo del número  $\overline{ab}$ ?

R:

**Problema 2.** Una tira de papel rectangular  $ABCD$  se ha dividido en 2024 triángulos. El primer triángulo tiene área  $1 \text{ cm}^2$ , el segundo tiene área  $2 \text{ cm}^2$ , el tercero tiene área  $3 \text{ cm}^2$  y, así sucesivamente, como se muestra en la figura. Determina el área, en  $\text{cm}^2$ , del triángulo  $EBC$ .



R:

**Problema 3.** Usando exactamente una vez cada uno de los dígitos del 1 al 6, se forman números de seis dígitos  $\overline{abcdef}$ . ¿Cuántos de estos números son múltiplos de 6 y cumplen que los números de 3 dígitos  $\overline{abc}$  y  $\overline{def}$  son múltiplos de 3?

R:

**Problema 4.** Sean  $p$ ,  $q$ ,  $r$  y  $s$  enteros positivos, con  $p$ ,  $r$  y  $s$  números primos y  $r < s$ . Si  $p + q = 11r$  y  $7p - q = 11s$ , determina el valor de  $p + q + r + s$ .

R:

**Problema 5.** Un entero positivo  $n$  es *sumativo* si  $n$  es igual al producto de sus dígitos más la suma de sus dígitos. Por ejemplo, 39 es sumativo, porque  $39 = 3 \times 9 + 3 + 9$ . ¿Cuántos números sumativos menores que 1000 hay?

R:

**Problema 6.** Un cuadrado está inscrito en un triángulo rectángulo, de manera que dos de los vértices del cuadrado están sobre la hipotenusa del triángulo y los otros dos vértices están cada uno en cada cateto. Si los catetos miden 3 cm y 4 cm, determina la longitud, en cm, del lado del cuadrado.

R:

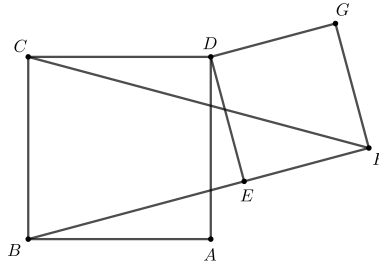
**Problema 7.** Decimos que un número entero positivo es *antipar* si todos sus dígitos son impares. Determina el número de divisores positivos del producto de los dígitos de todos los números antipares menores que 100.

R:

**Problema 8.** Una familia tiene 5 niños de distintas edades enteras y positivas, tales que las sumas de las edades de cada par de niños son distintas. ¿Cuál es la edad mínima posible del niño que tiene la mayor edad?

R:

**Problema 9.** En la siguiente figura,  $ABCD$  y  $DEFG$  son cuadrados. Si los puntos  $B$ ,  $E$  y  $F$  son colineales, esto es, están en la misma recta y,  $\angle ABE = 15^\circ$ , determina la medida, en grados, del ángulo  $\angle BFC$ .



R:

**Problema 10.** Determina el valor de la suma

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2024}\right)^2 + 1} + \frac{1}{\left(\frac{2}{2023}\right)^2 + 1} + \frac{1}{\left(\frac{3}{2022}\right)^2 + 1} + \dots + \frac{1}{\left(\frac{2023}{2}\right)^2 + 1} + \frac{1}{\left(\frac{2024}{1}\right)^2 + 1}.$$

R:

**Problema 11.** Sea  $ABC$  un triángulo con  $\angle BAC = 75^\circ$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$  y  $\angle ACB = 45^\circ$ . Sea  $D$  el pie de la bisectriz desde  $B$  y sea  $M$  el punto medio de  $BC$ . Si  $BM = 1$ , determina el valor de  $DM^2$ .

R:

**Problema 12.** En un examen de matemáticas participaron 12 estudiantes, donde cada problema fue resuelto por exactamente 10 estudiantes. Si 11 estudiantes resolvieron exactamente 6 problemas, ¿cuántos problemas resolvió el doceavo estudiante?

R:

PARTE B

Estado: -----

Nombre: -----

**Problema 13.** Sean  $x \geq 1$  y  $y \geq 1$  números reales positivos tales que

$$x^2(y + 1) + y^2(x + 1) = 4xy.$$

Determina el valor de  $x + y$ .

**Estado:** -----

**Nombre:** -----

**Problema 14.** Sea  $ABCDE$  un pentágono tal que  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $\angle BCD = 150^\circ$ ,  $\angle CDE = 60^\circ$ ,  $\angle DEA = 120^\circ$ ,  $\angle EAB = 120^\circ$ ,  $AB = CD$  y  $DE = AB + AE$ . Demuestra que

$$\text{Área}(ABCDE) = \frac{(DE^2 + 2AB \cdot AE)\sqrt{3}}{4}.$$

**Estado:** -----

**Nombre:** -----

**Problema 15.** Alrededor de una mesa redonda se sientan 10 niños. Después del descanso, se vuelven a sentar alrededor de la mesa y descubren que cada uno está sentado en su lugar original o en uno de los dos lugares junto a su lugar original. ¿De cuántas formas puede suceder esto?