Examen Individual

NIVEL II

Instrucciones: El examen consta de dos partes. La parte A consta de 12 problemas con un valor de 5 puntos cada uno. En estos problemas solo se toma en cuenta la respuesta final, que debe ser claramente escrita en el espacio correspondiente a cada problema, no se darán puntos parciales y no hay penalizaciones por respuestas incorrectas. Para las preguntas con varias respuestas, se darán los 5 puntos solo si todas las respuestas correctas están escritas y solo ellas. La parte B consta de 3 problemas de redacción libre y con un valor de 20 puntos cada uno. En estos problemas es posible acumular puntos parciales. Las figuras mostradas, podrían no estar a escala. No está permitido el uso de calculadoras, transportadores y aparatos electrónicos. La duración del examen es de **2 horas.**

PARTE A

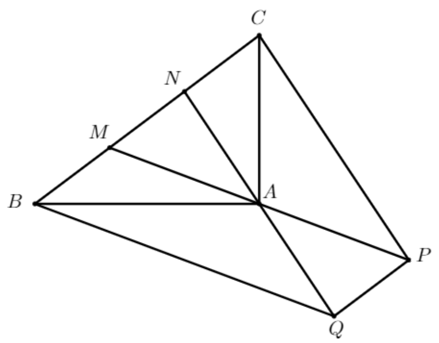
Problema 1. Juan nació después del año 1970 pero antes del 2000. Si en el año n^2 Juan cumple n años, ¿cuántos años cumple Juan en el año 2020?

R:

Problema 2. Un píxel está formado por 3 leds: uno rojo, uno verde y uno azul, donde cada uno puede prender con 4 intensidades de luminosidad diferentes (además de que pueden estar apagados). Cada configuración de estos tres leds determina el color del píxel. ¿Cuántas configuraciones hay con el led azul prendido?

R:

Problema 3. Sea ABC un triángulo rectángulo con $\angle BAC = 90°$ y área $12\,\text{cm}^2$. Sean M y N puntos en la hipotenusa BC tales que $BM = MN = NC$. Se prolongan los segmentos MA y NA más allá de A, hasta los puntos P y Q tales que $MA = AP$ y $NA = AQ$. Encontrar el valor del área del cuadrilátero $BCPQ$ en cm^2.



R:

Problema 4. Una máquina A es capaz de cortar una determinada área de césped en 120 minutos. Una máquina B corta esa misma área en 240 minutos. Si se ponen a trabajar las dos máquinas al mismo tiempo para cortar esa área, ¿en cuántos minutos estará cortado el césped?

R:

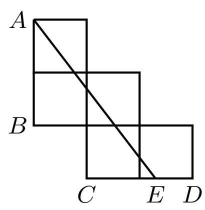
Problema 5. En cada casilla de una cuadrícula de 3×3 hay una moneda. ¿De cuántas maneras se pueden quitar dos monedas que no se encuentren en casillas que comparten un lado?

R:

Problema 6. Cada número de 3 cifras decimales se divide entre la suma de sus 3 cifras y da un resultado. Por ejemplo, el número 207 se divide entre $2 + 0 + 7 = 9$ y el resultado es $\frac{207}{9} = 23$. ¿Cuál es el mayor valor que se puede obtener como resultado, al considerar todos los números de tres cifras?

R:

Problema 7. La siguiente figura está formada por 5 cuadrados iguales de área $36\,\text{cm}^2$ cada uno. Los puntos A, B, C y D son vértices de cuadrados. El punto E del segmento CD es tal que el segmento AE divide a los 5 cuadrados en dos partes de la misma área. Determinar la medida, en cm, del segmento CE.

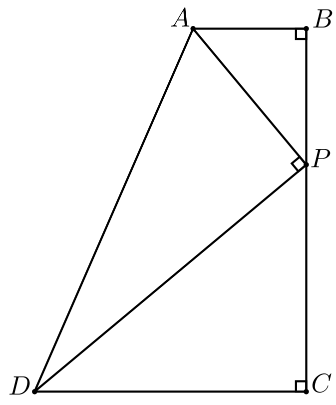


R:

Problema 8. ¿Cuántos números de la lista $1, 2, 3, \ldots, 2019, 2020$ tienen al menos un dígito igual a 2 o 0?

R:

Problema 9. En la siguiente figura se tiene $AB = 5$ cm, $BC = 16$ cm y $DC = 12$ cm. Si $BP < PC$, ¿cuánto mide, en cm^2, el área del triángulo APD?



R:

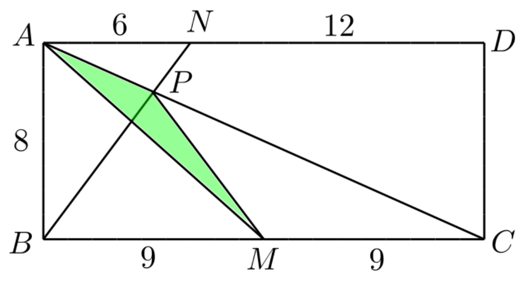
Problema 10. Se consideran todos los enteros positivos que se construyen escribiendo consecutivamente los primeros números enteros positivos. Por ejemplo, el que aparece en el primer lugar es el 1, en segundo lugar aparece 12, en el lugar 3 aparece 123, y así sucesivamente (en el lugar 12 aparece 123456789101112). De los números anteriores, ¿cuántos dígitos tiene el número más pequeño en el que aparece la cadena 2022? Por ejemplo, el número de dígitos del número más pequeño en el que aparece la cadena 91 es 11 pues aparece por primera vez en el décimo número 12345678**91**0, el cual tiene 11 dígitos.

R:

Problema 11. ¿Cuántos subconjuntos de 3 elementos (distintos) del conjunto $X = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ cumplen que el producto de los 3 números del subconjunto es divisible entre 4? Nota: Los subconjuntos $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$ y $\{2, 3, 1\}$ se consideran iguales.

R:

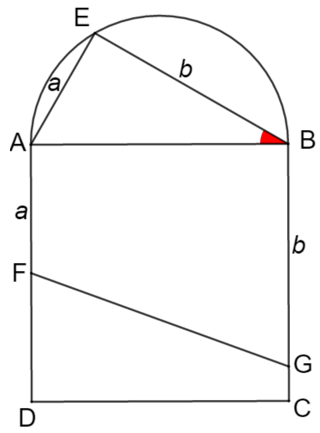
Problema 12. En la figura se muestra un rectángulo $ABCD$ con $AB = 8$ cm y $BC = 18$ cm; M es el punto medio de BC, N es el punto del segmento AD tal que $AN = 6$ cm, y P es el punto de intersección de AC con BN. Determinar el área, en cm^2, del triángulo APM.



R:

PARTE B

Problema 13. Sea $ABCD$ un cuadrado. Se dibuja, por fuera del cuadrado, un semicírculo que tenga al lado AB como diámetro. Se escoge un punto E en la semicircunferencia. Sean G y F puntos de los segmentos BC y AD, respectivamente, tales que $GB = BE$ y $AF = AE$. Sean $a = AF$ y $b = GB$. Si las áreas entre $ABGF$ y $FGCD$ están a razón $\frac{a+b}{3a-b}$, ¿cuánto mide el ángulo $\angle EBA$?



Problema 14. Sea $x_0 = a$ con a un número entero positivo. Para cada entero $n > 0$ definimos $x_n = 5x_{n-1} + 1$. ¿Cuántos valores de a menores o iguales que 2020 satisfacen que x_k no es divisible entre 9 para todo entero $k \geq 0$?

Problema 15. En la figura de abajo se muestra un panal de abejas. Dos hexágonos son vecinos si comparten una arista. Si en cada hexágono cabe a lo más una abeja, ¿cuál es la mayor cantidad de abejas que pueden vivir en dicho panal de modo que no haya abejas vecinas?