III Olimpiada Mexicana de Matemáticas
para Educación Básica

Oaxtepec, Morelos, junio 14-17, 2019.

Prueba por Equipos

Nivel II

Estado: ______________________________
Integrantes:
____
____
____

Instrucciones: Los problemas de la Prueba por Equipos están enlistados por orden de dificultad, pero cada uno vale lo mismo (40 puntos). Para los problemas 1, 3, 5, 7, solo se tomará en cuenta el resultado final y no se otorgarán puntos parciales, no se darán puntos parciales y no hay penalizaciones por respuestas incorrectas. Para las preguntas con varias respuestas, se darán los 40 puntos solo si todas las respuestas correctas están escritas y solo ellas. Los problemas 2, 4, 6, 8, requieren una solución completa y se podrán otorgar puntos parciales. La duración del examen es 70 minutos, que se distribuirán de la siguiente manera: (i) Durante los primeros 10 minutos, todos los integrantes del equipo podrán discutir y distribuirse entre ellos los primeros 6 problemas, de manera que cada miembro del equipo resuelva al menos un problema. En estos 10 minutos no se puede escribir. (ii) Durante los siguientes 35 minutos, cada participante trabajará individualmente en los problemas que se le asignaron, sin tener comunicación con los demás integrantes del equipo. (iii) Durante los últimos 25 minutos todos los miembros del equipo trabajarán en la solución de los últimos dos problemas.

Problema 1. Un entero positivo de cuatro dígitos es *bidigital* si su expresión decimal usa solamente dos dígitos y cada uno de ellos es usado dos veces. Por ejemplo, 2020 es bidigital, mientras que 2222 y 2111 no lo son. ¿Cuántos números bidigitales hay?

R:

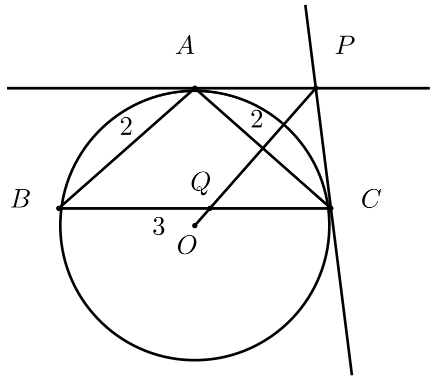
Problema 2. Encuentra los enteros positivos z, para los cuales $\dfrac{5z + 64}{z + 2}$ es una potencia de dos.

Problema 3. Un número es *chido* si la suma de sus dígitos entre el producto de sus dígitos, sin contar el 0, es $2/3$. Ejemplo, 2019 es chido porque la suma de sus dígitos es $2+1+9=12$ y el producto es $2\times1\times9=18$ y $\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$. Encuentra el número chido más cercano a 2019 (que sea distinto de 2019).

R:

Problema 4. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar números de entre $0, 1, 2$, en cada uno de los cuadritos de un tablero de 5×5, de manera que cada subtablero de 2×2 cumpla que la suma de los cuatro números de sus cuadritos sea un múltiplo de 3?

Problema 5. Sea ABC un triángulo con $AB = AC = 2\,cm$ y $BC = 3\,cm$. Considera la circunferencia que pasa por los vértices A, B, C y digamos que su centro es O. Se trazan las tangentes a dicha circunferencia que pasan por A y por C, estas tangentes se cortan en P. El segmento PO corta a BC en Q. Calcula, en cm, la longitud de CQ.



R:

Problema 6. ¿Cuál es el menor entero positivo que no es divisor común de alguna pareja de enteros distintos de la lista $2, 4, 6, \ldots, 200$?

Problema 7. El primer término de una sucesión es 97. Cada término subsecuente es la suma del dígito de las decenas y el cuadrado del dígito de las unidades del término anterior a él; por ejemplo, el segundo término es $9 + 7^2 = 58$. Encuentra el término 2019 de tal sucesión.

R:

Problema 8. Sean $ABCD$ un cuadrado cuyo lado mide $2\,cm$, M el punto medio del lado BC y Z el centro del cuadrado. Encuentra, en cm, el radio de la circunferencia que pasa por los puntos A, M y Z.