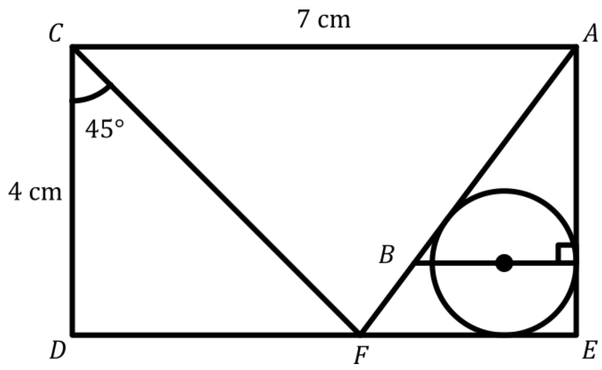
10. Sea P un polígono regular de n lados y vértices $V_1, V_2, \cdots, V_n$, y sea O su centro. Determina *todos* los posibles valores de n para que la bisectriz de $\angle V_2V_1O$ pase por V_3.

11. Una lancha cuando se desplaza en un río tranquilo va a 9 km/h. Un día que había corriente en el río, José recorrió un kilómetro de ida y un kilómetro de regreso en 15 minutos. ¿Cuál era la velocidad, en km/h, de la corriente del río ese día?

12. En la siguiente figura, $ACDE$ es un rectángulo y se han dibujado la circunferencia inscrita al triángulo AFE y su diámetro paralelo al lado FE. Encuentra la longitud, en cm, de AB.



Parte B

13. Coincide con el Problema 14 de Nivel II.

14. Ana tiene cuatro hermanas: Berta, Ceci, Diana y Elena. Su edad actual es un número impar menor que 30. Cuando Berta tenga el triple de la edad actual de Ana, se cumplirán las siguientes relaciones:

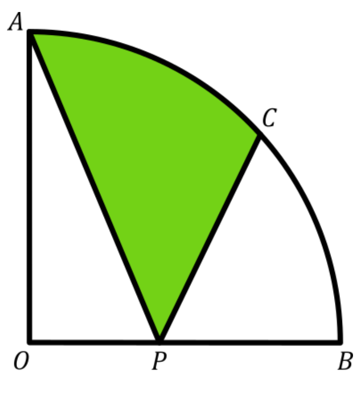
   a) La suma de las edades que tendrán en ese entonces Ana y Ceci será igual a la suma de las edades actuales de todas las hermanas.

   b) La edad de Diana será el triple de su edad actual.

   c) La edad de Elena será un año más que el doble de la edad actual de Berta.

   Halla la suma de las edades de Ana y Berta.

15. En la figura, el sector AOB representa una cuarta parte de un círculo de radio $r = 1$ y el punto C satisface que $\angle BOC = 45°$. Sea P un punto sobre el segmento OB (distinto de O y de B). Se trazan los segmentos AP y CP para formar la región sombreada. Demuestra que el área de la región sombreada es menor al área de la región sin sombrear.

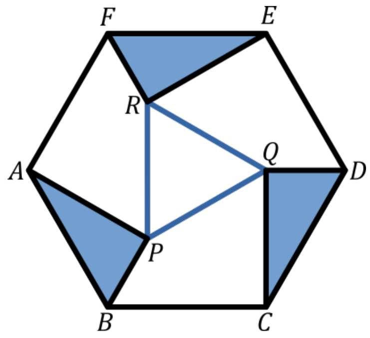


2.4. Prueba por equipos. Nivel I.

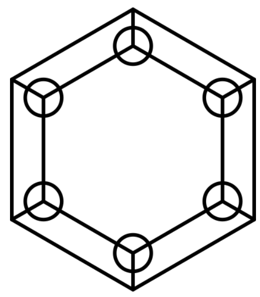
1. Ordena los siguientes números de menor a mayor,

$$3^6,\ 4^5,\ 5^4,\ 6^3.$$

2. En un hexágono regular $ABCDEF$ de área 1 cm^2, se han trazado en su interior tres triángulos congruentes ABP, CDQ y EFR con ángulos de 30°, 60° y 90°, los ángulos rectos en P, Q, R, como se muestra en la figura. Encuentra el área, en cm^2, del triángulo PQR.



3. Se acomodan 7 de los números del 1 al 8 en las caras de la siguiente figura, de forma que para cada tres caras que se toquen en un mismo círculo la suma de los números en tales caras sea un múltiplo de 3. ¿Cuáles números podrían sobrar en estos tipo de acomodos?



4. Sergio y Zael quieren ir a una heladería a comprar un tipo de helado cada día de la semana. Dentro de los artículos que se venden se encuentran los siguientes: paletas, raspados y sándwich de nieve. Además, de cada uno de los artículos hay 4 sabores: vainilla, fresa, chocolate y limón. Sergio quiere comprar un artículo de chocolate por día de manera que no coma lo mismo dos días seguidos, mientras que Zael quiere comprar paletas de distintos sabores sin comer dos días seguidos el mismo sabor. ¿Quién de los dos tiene más formas distintas de comprar a lo largo de toda la semana? Justifica tu respuesta.

5. Alguien cambió las etiquetas de los números de la calculadora de César. Los números deberían estar en la posición que muestra la imagen de la izquierda, pero sus posiciones fueron cambiadas a como se muestra en la imagen de la derecha.

7	8	9
4	5	6
1	2	3

9	8	7
6	5	4
3	2	1

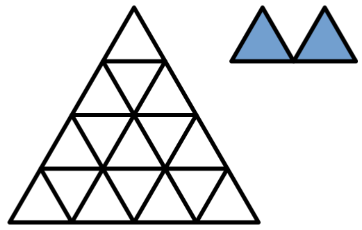
Como consecuencia de esto, cuando César aprieta el número 1, la calculadora registra el número 3 y al revés. Lo mismo pasa con el 4 y con el 6 y el 7 y 9. ¿Cuántas multiplicaciones distintas de dos números de un solo dígito, darán un resultado incorrecto cuando César utilice su calculadora? (Nota: las multiplicaciones 1×2 y 2×1 son consideradas multiplicaciones diferentes).

6. Encuentra el entero positivo más pequeño de seis dígitos, que cumpla que la suma de sus seis dígitos sea igual al producto de sus dígitos.

7. Acomoda ocho números enteros diferentes en los cuadritos que faltan, de manera que los productos de los tres números de cada renglón, de cada columna y de cada diagonal sean iguales.

	6	

8. Se quiere acomodar 8 piezas como las de las derecha (las puedes rotar de ser necesario) de manera que se cubra toda la figura de la izquierda. ¿Cuántos acomodos diferentes se pueden hacer?



2.5. Prueba por equipos. Nivel II.

1. Coincide con el Problema 3 de Nivel I.

2. Coincide con el Problema 6 de Nivel I.

3. Encuentra todas las parejas de números reales (x, y) que cumplen las siguientes dos igualdades

$$x^3 + y^3 = 1,$$
$$x^2 + y^2 = 1.$$

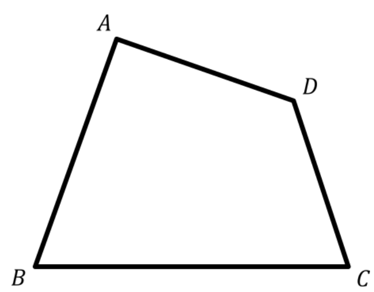
4. Encuentra todas las parejas de enteros positivos (a, r) tales que el número $N = a^2+(a+r)^2+(a+2r)^2+(a+3r)^2+(a+4r)^2$ tenga todos sus dígitos iguales.

5. Un triángulo ABC con vértices sobre una circunferencia de centro O tiene la siguiente propiedad: si O, C' son simétricos con respecto a C se cumple que $\angle CC'A = \angle ABC$. Encuentra el valor (en grados) del ángulo $\angle ABC$.

6. Coincide con el Problema 8 de Nivel I.

7. Los números **creativos** son números de 4 dígitos $abcd$ tales que los números de dos dǵitos ab, cd son ambos pares. Además, la suma de sus dígitos es un número primo. Por ejemplo, 2018 es número creativo, ya que $ab = 20$ y $cd = 18$ son números pares de dos dígitos y la suma $2 + 0 + 1 + 8 = 11$ es un número primo. ¿Cuántos números creativos menores o iguales al 2018 hay?

8. Sea $ABCD$ un cuadrilátero, como se indica en la figura. Muestra que si los cuatro triángulos ABC, BCD, CDA, DAB, tienen el mismo perímetro, entonces $ABCD$ es un rectángulo.



2.6. Prueba por equipos. Nivel III.

1. Sea $A = \{2, 5, 8, 11, \dots, 2018\}$, cada número, a partir del segundo, es el anterior más 3. Determina el mínimo valor k tal que si escogemos k números del conjunto A, necesariamente hay dos distintos cuya suma sea 2020.

2. Todos los números impares se dividen en grupos como se indica:

$$\{1\},\ \{3, 5\},\ \{7, 9, 11\},\ \{13, 15, 17, 19\},\ \dots .$$

¿Cuál es la suma de los elementos del décimo grupo?

3. Coincide con el Problema 5 de Nivel II.
4. Coincide con el Problema 4 de Nivel II.
5. Coincide con el Problema 7 de Nivel II.
6. Coincide con el Problema 8 de Nivel II.
7. Consideramos un tablero de 8×8. El **Batab** es una pieza que puede moverse de una casilla a otra vecina (que comparte un lado). Un **camino del Mayab** es un camino que va de una casilla inicial a una final tal que:

   a) Consta exclusivamente de movimientos del Batab.

   b) En cada paso se aleja del punto inicial y se acerca al punto final.

   Se coloca una ficha verde en una casilla y una ficha naranja en otra distinta, luego se coloca una ficha blanca en una casilla que está dentro de un camino del Mayab que va de la ficha verde a la ficha naranja. Llamamos T al número total de caminos del Mayab que van de la ficha verde a la naranja pasando por la ficha blanca. Encuentra el número total de formas distintas en que se pueden colocar las tres fichas de modo que 49 divida a T.
8. Los gemelos Adán y Beto van de su casa a la escuela. Adán, corre la mitad del trayecto y camina la otra mitad, mientras que Beto corre la mitad del tiempo y camina la otra mitad del tiempo. Los dos corren a una misma velocidad v_1 y los dos caminan a una misma velocidad v_2. ¿Quién de ellos llega primero? Justifica tu respuesta.

2.7. Autores.

Todos los problemas en los exámenes son inéditos y fueron propuestos por los siguientes estados:

Examen Individual					
Nivel I		Nivel II		Nivel III	
1	Veracruz	1	Jalisco	1	Coahuila
2	Baja California	2	Comité	2	Comité
3	Veracruz	3	Comité	3	Comité
4	Cd. de México	4	Cd. de México	4	Comité
5	Coahuila	5	Coahuila	5	Comité
6	Michoacán	6	Cd. de México	6	Comité
7	Jalisco	7	Tabasco	7	Comité
8	Jalisco	8	Comité	8	Michoacán
9	Comité	9	Comité	9	Coahuila
10	Tabasco	10	Comité	10	Chiapas
11	Hidalgo	11	Comité	11	Comité
12	Coahuila	12	Comité	12	Sinaloa
13	Comité	13	Comité	13	Comité
14	Cd. de México	14	Comité	14	Comité
15	MIchoacán	15	Comité	15	Comité

Prueba por Equipos					
Nivel I		Nivel II		Nivel III	
1	Comité	1	Sinaloa	1	Tabasco
2	Comité	2	Comité	2	Comité
3	Sinaloa	3	Comité	3	Comité
4	Baja California	4	Michoacán	4	Michoacán
5	Ciudad de México	5	Comité	5	Tabasco
6	Comité	6	Michoacán	6	Comité
7	Comité	7	Tabasco	7	Hidalgo
8	Michoacán	8	Comité	8	Comité