Prueba por equipos.

Instrucciones: Los problemas de la Prueba por Equipos están enlistados por orden de dificultad, pero cada uno vale lo mismo (40 puntos). Para los problemas 1, 3, 5 y 7 sólo se tomará en cuenta el resultado final y no se otorgarán puntos parciales. Los problemas 2, 4, 6 y 8 requieren una solución completa y se podrán otorgar puntos parciales. La duración del examen es de 70 minutos, que se distribuirá de la siguiente manera:

(i) Durante los primeros 10 minutos, todos los integrantes del equipo podrán discutir y distribuirse entre ellos los primeros 6 problemas, de manera que cada miembro del equipo resuelva al menos un problema.

(ii) Durante los siguientes 35 minutos, cada participante trabajará individualmente en los problemas que se le asignaron.

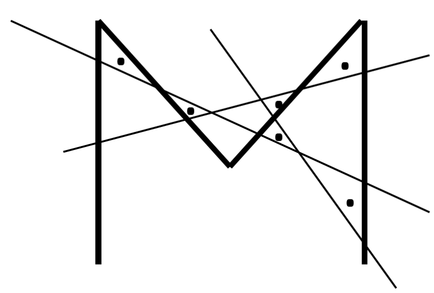
(iii) Durante los últimos 25 minutos todos los miembros del equipo trabajarán en la solución de los últimos dos problemas.

5.1. Nivel I.

1. El botón “4” de mi calculadora está estropeado, así que no puedo escribir números que contengan el dígito 4. Más aún, mi calculadora tampoco muestra el dígito 4 si 4 es parte de la respuesta. Por esto no puedo escribir la cuenta 2×14. También, el resultado de multiplicar 3 por 18 se muestra como 5 en vez de 54 y el resultado de multiplicar 7×7 se muestra como 9 en vez de 49. Si multiplico un entero positivo de solo un dígito, por un positivo de dos dígitos en mi calculadora y ésta muestra 26, ¿cuántas posibilidades pude haber multiplicado?

2. Sea $m = 76^{2016} - 76$. Halla el residuo cuando m es dividido entre 100.

3. Deeds atraviesa la letra M con tres rectas y obtiene exactamente 6 triángulos, como lo indica la figura. Drini atraviesa la letra M con tres rectas y obtiene exactamente 9 triángulos. Dibuja una posible manera en que Drini pudo hacer esto.



4. Sean p y q dos primos consecutivos. Para algún entero fijo n, el conjunto $\{n-1, 3n-19, 38-5n, 7n-45\}$ representa $\{p, 2p, q, 2q\}$, pero no necesariamente en ese orden. Encuentre el valor de n

5. Ricardo tiene un jardín en forma de cuadrícula y en cada casilla una flor, como se muestra en la figura. Su esposa corta 12 flores para poner en un florero y Ricardo observa que en cada renglón y columna de su jardín quedaron plantadas exactamente la misma cantidad de flores. Dibuja una de las posibles maneras en que la esposa de Ricardo pudo haber cortado las flores.

*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*

6. El conjunto $\{7, 83, 421, 659\}$ tiene las siguientes propiedades:

   a) Todos sus elementos son números primos.

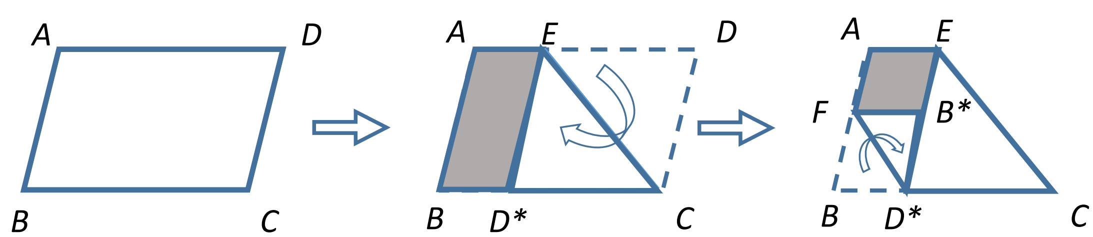
   b) Al considerar todas las cifras que los conforman, aparecen todos los dígitos (excepto el 0) exactamente una vez.

   Encuentra el conjunto con estas dos propiedades y que además la suma de sus elementos sea mínima.

7. En la siguiente cuadrícula se escriben todos los números del 1 al 9 (sin repetir) de modo que la sumas de los tres números en cada renglón, columna o diagonal principal sea diferente. Luis ya puso el 1 y el 5 como se muestra en la figura. Termina de acomodar los restantes números.

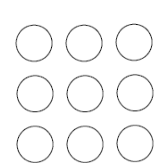
1		
		5

8. Un paraleogramo de papel se dobla desde la esquina superior derecha (D) como lo muestra la figura, de modo que la región sombreada tiene 3/8 del área del paralelogramo original. A continuación, se vuelve a doblar sobre la esquina inferior izquierda (B) como lo muestra la figura. ¿A qué porción del área del paralelogramo original corresponde la región sombreada de la última figura?



5.2. Nivel II.

1. El siguiente dibujo representa 9 mesas de una sala de fiestas. Se tienen 3 manteles verdes, 3 blancos y 3 rojos para poner sobre las mesas. ¿De cuántas maneras se pueden colocar los manteles de manera de que no hayan manteles del mismo color en cada renglón o columna?



2. Hugo le dice a Lalo: "ya verifiqué en mi calculadora que solamente una de las siguientes parejas (x, y) da como resultado un entero positivo al calcular $\sqrt{x^2 + y^2}$". ¿Cuál es esa pareja?

   a) $x = 25530$, $y = 29464$;

   b) $x = 37615$, $y = 26855$;

   c) $x = 15123$, $y = 32477$;

   d) $x = 28326$, $y = 28614$;

   e) $x = 22536$, $y = 27462$.

3. Encuentre la parte entera de

$$\frac{1}{\frac{1}{2010}+\frac{1}{2011}+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2013}+\frac{1}{2014}+\frac{1}{2015}+\frac{1}{2016}}.$$

4. Sea ABC un triángulo acutángulo con $BC > CA$. Sean P, Q las intersecciones de la mediatriz del segmento AB con las rectas BC y CA, respectivamente. Sean R el pie de la perpendicular desde P a CA y S el pie de la perpendicular desde Q a BC. Demuestra que S, R y el punto medio de AB son colineales.

5. El siguiente dibujo representa un mapa del juego *buscaminas*. En 10 de los cuadritos hay una bomba. En los cuadritos marcados, los números indican cuántas bombas hay en los cuadritos junto a él (es decir, los cuadritos con los que comparte un lado o una esquina). Además, en los cuadritos marcados se sabe que no hay bombas. Indica en el diagrama con una X la ubicación de los 10 cuadritos que contienen bombas.

		1				1	
1				3			
		4				3	
1				1			2
	1		1				
					1		
	2						
			3		1		

6. Halla el entero positivo más grande que divide a todos los números de la forma

$$(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n+9),$$

donde n es un entero positivo.

7. Dos grupos de olímpicos organizan un torneo de tenis, donde cada participante de cada uno de los grupos juega partidos contra todos los participantes del otro grupo. El día del torneo dos participantes estaban enfermos (uno de cada grupo), por lo que no pudieron asistir. Al final el número de partidos sin esos dos jugadores resultó 20 % menor que si hubieran asistido. Encuentra todos los posibles valores del número total de jugadores que participaron en el torneo.

8. Sea p un número primo tal que $2p$ es la suma de los cuadrados de cuatro enteros consecutivos. Demuestra que 36 divide a $p-7$.

5.3. Nivel III.

1. Calcule $\sqrt[3]{77-20\sqrt{13}}+\sqrt[3]{77+20\sqrt{13}}$.

2. Si $|x|+x+5y=2$ y $|y|-y+x=7$, encuentre el valor de $x+y+2016$.

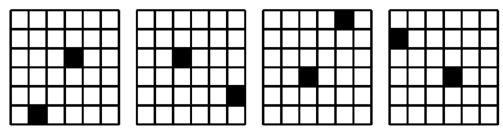
3. Sea n un número de 5 cifras. Denotemos por q y r al cociente y residuo que se obtienen al dividir n entre 100. ¿Para cuántos valores de n se tiene que $q+r$ es un múltiplo de 11?

4. Uge olvidó la clave para desbloquear su teléfono, pero recuerda que tiene 5 cifras distintas. Así que intentó con las siguientes claves: 40876, 23497, 15472 y 75604. En su primer intento exactamente dos números de su clave aparecen, pero en un lugar equivocado. En el segundo intento exactamente dos números coinciden con su clave. En el tercer intento exactamente un número coincide con su clave. En el cuarto intento exactamente un número de su clave aparece, pero en el lugar equivocado. Con esta información, ¿Puede Uge saber a ciencia cierta cuál es su clave? En caso afirmativo, escribe la clave de Uge. En caso negativo, explica por qué.

5. Sobre una mesa se encuentran tres pelotas de radio 1 y tangentes entre si. Sobre ellas se asienta una pelota de radio 2. ¿A que altura sobre la mesa se halla el centro de la pelota grande?

6. Sean a y b enteros positivos con $a > b > 2$. Demuestre que $\dfrac{2^a+1}{2^b-1}$ nunca es un entero.

7. Deeds tiene un tablero blanco de 6×6 y desea pintarle dos casillas de negro. Dos coloraciones que difieran en una rotación se consideran equivalentes, por ejemplo, las cuatro coloraciones que se ilustran en la figura son todas equivalentes:



   ¿De cuántas maneras no equivalentes puede Deeds pintar su tablero?

8. Los puntos K y N se toman en los lados AB y AC de $\triangle ABC$, respectivamente, de manera que $KB = KN$. La bisectriz de $\angle ACB$ interseca al circuncírculo de $\triangle ABC$ en el punto R. La perpendicular de R a la recta AB interseca al segmento BN en D. Demuestra que los puntos A, K, D, N son concíclicos.