34^a **Olimpiada Mexicana de Matemáticas**
Concurso Nacional

Virtual, 10 de noviembre de 2020
Primer día

Problema 1.
A un conjunto de 5 enteros positivos distintos, se le llama *virtual* si el máximo común divisor de cualesquiera 3 de sus elementos es mayor que 1, pero el máximo común divisor de cualesquiera 4 de sus elementos es igual a 1. Demuestra que en cualquier conjunto virtual, el producto de sus 5 elementos tiene al menos 2020 divisores positivos distintos.

Nota: *El máximo común divisor de dos o más números enteros es el mayor entero positivo que divide a cada uno de ellos.*

Problema 2.
Sea ABC un triángulo con incentro I. La recta BI corta a AC en D. Sean P un punto en CI tal que $DI = DP$ ($P \neq I$), E la segunda intersección del segmento BC con el circuncírculo del triángulo ABD y Q la segunda intersección de la recta EP con el circuncírculo del triángulo AEC. Muestra que $\angle PDQ = 90°$.

Problema 3.
Sea $n \geq 3$ un número entero. Dos jugadores, Ana y Beto, juegan a lo siguiente. Ana etiqueta los vértices de un n-ágono regular con los números del 1 al n, en el orden que ella quiera. Cada vértice debe quedar etiquetado con un número distinto. Luego, se coloca un guajolote en cada uno de los vértices.
Estos guajolotes están entrenados para lo siguiente. Si Beto silba, cada guajolote se mueve al vértice adyacente que tenga la etiqueta con el número mayor. Si Beto aplaude, cada guajolote se mueve al vértice adyacente que tenga la etiqueta con el número menor.
Beto gana si después de dar algún número de silbidos y aplausos, en el orden que él quiera, logra que todos los guajolotes queden en el mismo vértice. Ana gana si puede etiquetar los vértices de modo que Beto no pueda hacer lo anterior. Para cada $n \geqslant 3$, determina qué jugador tiene una estrategia que garantice su victoria.

Cada problema vale 7 puntos.
Tiempo máximo del examen 4 horas y media.

34^a **Olimpiada Mexicana de Matemáticas**
Concurso Nacional

Virtual, 11 de noviembre de 2020
Segundo día

Problema 4.
Sea $n \geq 3$ un número entero. En un juego hay n cajas colocadas en forma circular. Al principio cada caja contiene un objeto que puede ser piedra, papel o tijeras, de manera que no hay dos cajas adyacentes con el mismo objeto, y cada uno de los objetos aparece en al menos una caja.

Como en el juego de piedra, papel y tijeras, decimos que piedra gana a tijeras, tijeras gana a papel y papel gana a piedra.

El juego consiste en mover objetos de una caja a otra siguiendo la siguiente regla:

Se escogen dos cajas adyacentes y un objeto de cada una, de forma que los objetos sean distintos, y se pasa el objeto perdedor a la caja donde está el ganador. Por ejemplo, si de una caja A se escogió piedra y de la caja adyacente, B, se escogió tijeras, entonces tijeras se va a la caja A.

Demuestra que, aplicando la regla un número suficiente de veces, es posible lograr que al final todos los objetos estén juntos en una misma caja.

Problema 5.
Una cuarteta de enteros positivos distintos $\{a, b, c, d\}$, se dice que es *pandémica* si hay 2 de ellos tales que su producto es múltiplo del máximo común divisor de los otros 2. Por ejemplo, la cuarteta $\{4, 6, 2, 8\}$ es pandémica pues el máximo común divisor de 2 y 6 es 2, y este divide a $4 \times 8 = 32$.

Encuentra el máximo valor de n, para el cuál toda cuarteta de enteros positivos distintos menores o iguales que n es pandémica.

Problema 6.
Sea $n \geq 2$ un número entero. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales distintos de 0 que satisfacen la ecuación

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(x_n + \frac{1}{x_1}\right) = \left(x_1^2 + \frac{1}{x_2^2}\right)\left(x_2^2 + \frac{1}{x_3^2}\right)\ldots\left(x_n^2 + \frac{1}{x_1^2}\right).$$

Encuentra todos los posibles valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Cada problema vale 7 puntos.
Tiempo máximo del examen 4 horas y media.