22^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

San Carlos, Sonora, 2008

Primer día

1. Sean $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_k = n$ los divisores del entero positivo n. Encuentra todos los números n tales que $n = d_2^2 + d_3^3$.

2. Considera una circunferencia Γ, un punto A fuera de Γ y las tangentes AB, AC a Γ desde A, con B y C los puntos de tangencia. Sea P un punto sobre el segmento AB, distinto de A y de B. Considera el punto Q sobre el segmento AC tal que PQ es tangente a Γ, y a los puntos R y S que están sobre las rectas AB y AC, respectivamente, de manera que RS es paralela a PQ y tangente a Γ. Muestra que el producto de las áreas de los triángulos APQ y ARS no depende de la elección del punto P.

3. Considera un tablero de ajedrez. Los números del 1 al 64 se escriben en las casillas del tablero como en la figura:

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

   Se disponen de suficientes caballos de ajedrez para colocarlos en las casillas del tablero de manera que no se ataquen entre sí. Calcula la suma de los números de las casillas donde están colocados los caballos. ¿Cuál es la suma máxima que puedes obtener? **Nota.** Dos caballos se atacan entre sí, cuando se encuentran en 2 esquinas opuestas de un rectángulo de 2×3 o de 3×2.

Segundo día

4. Un rey decide realizar un juego para premiar a uno de sus caballeros, para ello, acomoda a los n caballeros en una mesa redonda y hace que digan los números 1, 2, 3 y repitan de nuevo 1, 2, 3 y así sucesivamente (lo dicen en el sentido de las manecillas del reloj y cada persona dice un número). Las personas que dicen 2 ó 3 son retiradas inmediatamente y el juego continúa hasta que queda un sólo caballero, *el ganador*. Se numeran las personas del 1 al n conforme al primer turno.

   Encuentra todos los valores de n de tal manera que el ganador sea el caballero 2008.

5. En los vértices de un cubo están escritos 8 enteros positivos distintos y en cada una de las aristas del cubo está escrito el máximo común divisor de los números que están en los 2 vértices que forman a la arista. Sean A la suma de los números escritos en las aristas y V la suma de los números escritos en los vértices.

   a) Muestra que $\frac{2}{3}A \leq V$.

   b) ¿Es posible que $A = V$?

6. Las bisectrices internas de los ángulos A, B y C de un triángulo ABC concurren en I y cortan al circuncírculo de ABC en L, M, N, respectivamente. La circunferencia de diámetro IL, corta al lado BC, en D y E; la circunferencia de diámetro IM corta al lado CA en F y G; la circunferencia de diámetro IN corta al lado AB en H y J. Muestra que D, E, F, G, H, J están sobre una misma circunferencia.