13^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Oaxaca, Oaxaca, 1999
Primer día

1. Sobre una mesa hay 1999 fichas que son rojas de un lado y negras del otro (no se especifica cuál de sus dos caras está hacia arriba). Dos personas juegan alternadamente. Cada persona en su turno hace una de las siguientes cosas:

   (i) Retira un número cualquiera de fichas, con la condición de que todas las fichas retiradas tengan el mismo color hacia arriba.

   (ii) Voltea un número cualquiera de fichas, con la condición de que todas las fichas tengan el mismo color hacia arriba.

   Gana el que toma la última ficha. ¿Cuál jugador puede asegurar que ganará, el primero en jugar o el segundo?

2. Demuestre que no existen 1999 primos en progresión aritmética, todos ellos menores que 12345.

3. Considere un punto P en el interior del triángulo ABC. Sean D, E y F los puntos medios de AP, BP y CP, respectivamente y L, M y N los puntos de intersección de BF con CE, AF con CD y AE con BD.

   (i) Muestre que el área del hexágono $DNELFM$ es igual a una tercera parte del área del triángulo ABC.

   (ii) Muestre que DL, EM y FN concurren.

Segundo día

4. En una cuadrícula de 8×8 se han escogido arbitrariamente 10 cuadraditos y se han marcado los centros de estos. El lado de cada cuadradito mide 1. Demuestre que existen al menos dos puntos marcados que están separados por una distancia menor o igual que $\sqrt{2}$, o que existe al menos un punto marcado que se encuentra a una distancia de $\frac{1}{2}$ de una orilla de la cuadrícula.

5. $ABCD$ es un trapecio con AB paralelo a CD. Las bisectrices exteriores de los ángulos B y C se intersectan en P. Las bisectrices exteriores de los ángulos A y D se intersectan en Q. Demuestre que la longitud de PQ es igual a la mitad del perímetro del trapecio $ABCD$.

6. Un polígono se dice que es ortogonal si todos sus lados tienen longitudes enteras y cada dos lados consecutivos son perpendiculares. Demuestre que si un polígono ortogonal se puede cubrirse con rectángulos de 2×1 (sin que estos se traslapen), entonces al menos uno de sus lados tiene longitud par.