Trigonometría

Estefanía Ordaz

En trigonometría no interesa el estudio de ciertas funciones que nos consideraremos como las relaciones o “razones” entre los lados de un triángulo rectángulo.

Sea ΔABC un triángulo rectángulo en C y α el ángulo en A, definimos el *seno*, *coseno*, *tangente*, *cosecante*, *secante* y *cotangente* del ángulo α como:

$$\sin\alpha=\frac{a}{c} \qquad \csc\alpha=\frac{c}{a}$$

$$\cos\alpha=\frac{b}{c} \qquad \sec\alpha=\frac{c}{b}$$

$$\tan\alpha=\frac{a}{b} \qquad \cot\alpha=\frac{b}{a}$$

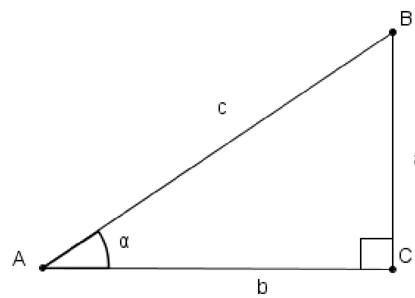


Figura 1

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Es decir, el coseno de un ángulo es igual al seno del ángulo complementario.

Por el teorema de Pitágoras sabemos que

$$a^2+b^2=c^2$$

Si dividimos esa igualdad entre a^2, b^2 y c^2 obtenemos

$$\frac{a^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad 1+\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{c}{a}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$$

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{b^2}=\frac{c^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2+1=\left(\frac{c}{b}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha$$

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

Y a estas últimas llamamos *identidades trigonométricas*.

Si consideramos una circunferencia centrada en el origen de radio 1, y sea P un punto en la circunferencia de coordenadas (x,y). Observemos (figura 2) que al trazar las proyecciones de P sobre los ejes, se forman triángulos rectángulo, donde

$$\cos\alpha = x$$
$$\sin\alpha = y$$

Es decir, P tiene coordenadas $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, y si ponemos variamos P en la circunferencia los valores del seno y coseno cambian a medida que el ángulo crece.

De podemos ver fácilmente los valores del seno y el coseno en los ejes, es decir

$$\cos 0 = 1 \qquad \sin 0 = 0$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos\pi = -1 \qquad \sin\pi = 0$$

$$\cos\frac{3\pi}{2} = 0 \qquad \sin\frac{3\pi}{2} = -1$$

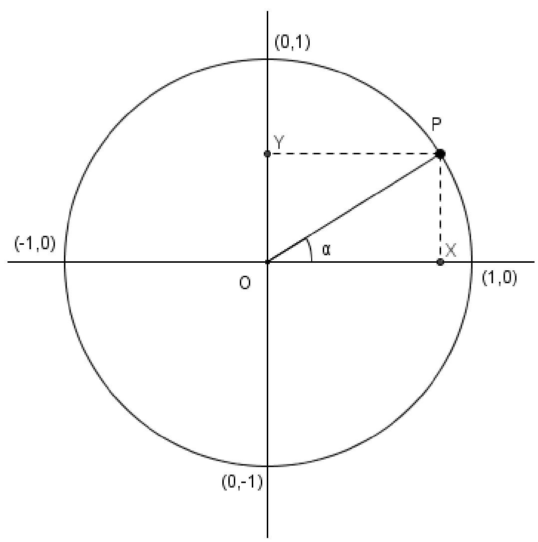


Figura 2

Ley del seno

Veamos que para cualquier triángulo ΔABC, el *seno* de cada ángulo interno del triángulo es igual a la medida del lado opuesto al ángulo entre el diámetro de la circunferencia.

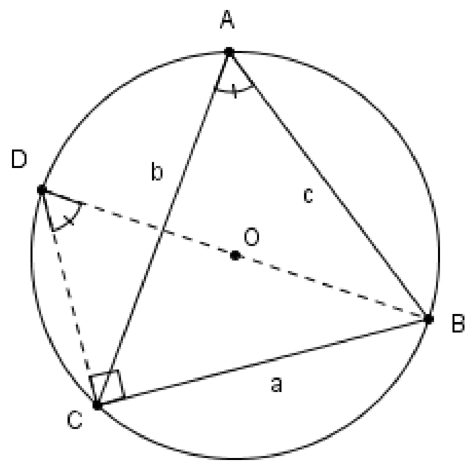


Figura 3

Sea D un punto en el circuncírculo de ΔABC tal que DB pasa por el circuncentro O. Sabemos que el ángulo $\angle CDB = \angle CAB = \angle A$ y como DB es diámetro, $\angle BCD$ es recto. Como ΔDBC es un triángulo rectángulo tenemos

$$\sin \angle A = \sin \angle CDA = \frac{a}{2R}$$

Donde R es el radio del circuncírculo de ΔABC.

Si hacemos el razonamiento análogo para los ángulos $\angle B$ y $\angle C$, podemos ver

$$\sin \angle B = \frac{b}{2R}$$
$$\sin \angle C = \frac{c}{2R}$$

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R$$

Y esta relación de proporcionalidad se llama *Ley del seno*.

Sabemos que la cuerda que determina un ángulo recto inscrito en una circunferencia es igual al diámetro, por lo tanto

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Que corresponde al valor que habíamos visto anteriormente.

Seno de la suma de ángulos

Sea ABCD un cuadrilátero cíclico tal que AC es diámetro y es igual a 1. Por el teorema de Ptolomeo sabemos que

$$BD{\cdot}AC = AB{\cdot}CD + BC{\cdot}AD$$

$$\sin(\alpha+\beta)\sin\frac{\pi}{2} = \sin\gamma\sin\alpha + \sin\beta\sin\delta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos(\frac{\pi}{2}-\gamma) + \sin\beta\cos(\frac{\pi}{2}-\delta)$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

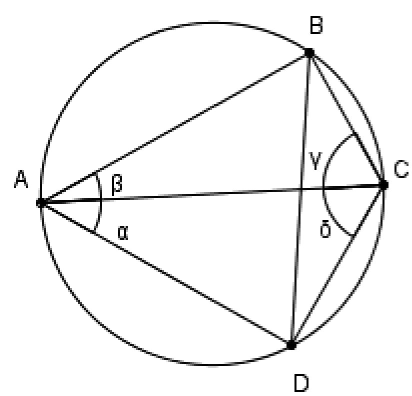


Figura 4

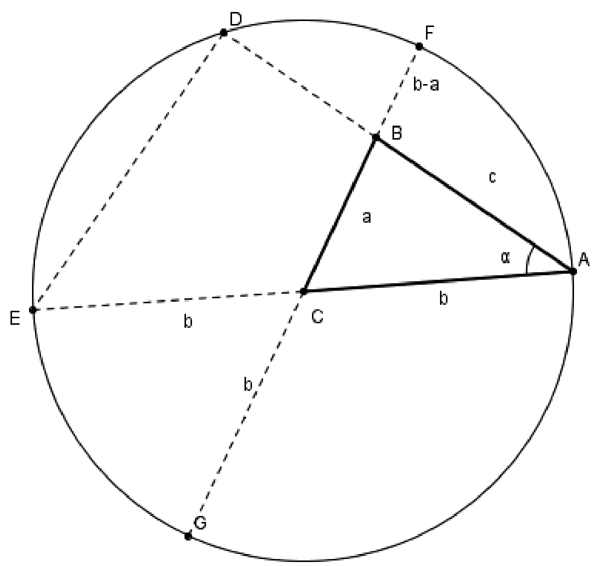
Podemos ver entonces que $\sin(\alpha+\pi) = \sin\alpha$, es decir, el seno de un ángulo es igual al seno del ángulo suplementarios.

Ley del coseno

Sea ABC un triángulo donde $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$ y $\angle A=\alpha$

$$a^2=b^2+c^2-2ab\cos\alpha$$

Demostración



Consideremos una circunferencia de centro C y radio b. Sean D y E las intersecciones de la dicha circunferencia con la prolongación de los lados AB y AC respectivamente, y sean F y G las intersecciones de la misma circunferencia con la recta que pasa por B y C. Como AE es diámetro, ΔAED es un triángulo rectángulo y nos queda

$$\cos\alpha=\frac{AD}{EA}$$

$$AD=2b\cos\alpha$$

$$DB=AD-c$$

$$DB=2b\cos\alpha-c$$

Si hacemos potencia de B respecto a la circunferencia

$$DB\cdot BA=FB\cdot BG$$

$$(2b\cos\alpha-c)c=(b-a)(b+a)$$

$$2bc\cos\alpha-c^2=b^2-a^2$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

Problemas

1. Sea ABC un triángulo de circunradio R. Denotemos (ABC) a su área. Demostrar que

$$(ABC)=\frac{abc}{4R}$$

2. Demostrar que en cualquier triángulo ABC

$$a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0$$

3. Sea ABC un triángulo cualquiera, demostrar que

$$a=b\cos C+c\cos B$$

4. Demuestre que

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$