<u>Teorema fundamental de la aritmética y números primos I</u>

Temas generales

1. Divisibilidad
    a. Definición básica
    b. Divisores y múltiplos
    c. Propiedades de la divisibilidad informal
2. Números Primos
    a. Definición básica
    b. Criba de Eratóstenes
    c. Prueba hasta la mitad y hasta la raíz
    d. ¿Cuántos números primos hay?
3. Teorema fundamental de la aritmética
    a. Enunciado
    b. Demostración intuitiva
    c. Cómo se factoriza un número en primos
    d. Ceros al final de un número
    e. Como son los divisores y múltiplos de un número según su factorización
    f. Número de divisores de un número según su factorización
    g. Suma y producto de divisores de un número
    h. Factorización de potencias perfectas
    i. Factorización de un factorial

Explicación

Números primos y descomposición en factores primos

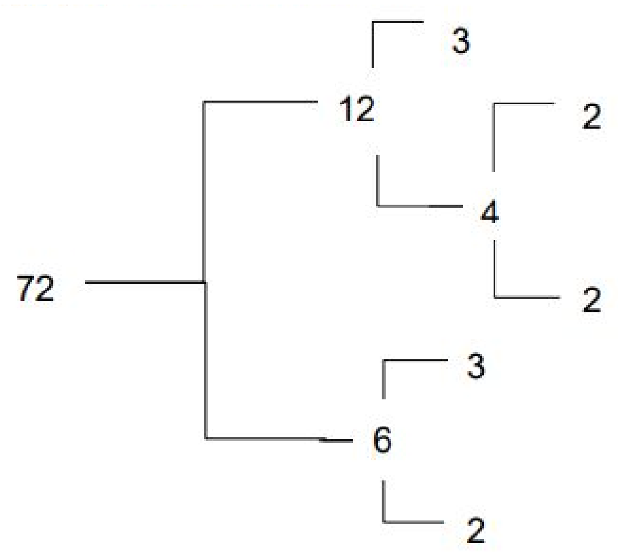
Un número primo es un número entero que tiene exactamente dos divisores positivos. Es importante hacer notar que el número 1 no es primo porque sólo tiene un divisor positivo. Así pues, por ejemplo, el número 7 es primo pues sólo lo dividen el 1 y el 7, y el 12 no es primo puesto que es divisible entre 1, 2, 3, 4, 6 y 12. Otra forma de ver a un número primo es definirlo como un número que no se puede escribir como producto de otros dos enteros. Por ejemplo, el 12 no es primo, puesto que 12=3x4. A los números que no son primos, a excepción del 1 (al que se le llama unidad), se les llama números compuestos.

Ejercicio: Identifica cuáles de los siguientes números son primos. 1, 2, 9, 13, 51, 91, 1001.

Definición: Factorizar en primos un número significa encontrar primos que al multiplicarlos dé como resultado el número.

Teorema: (Teorema Fundamental de la Aritmética) Todo número mayor a 1 se puede factorizar en primos. Demostración: Dado el número N hay de 2 opciones, N es primo (Ya acabamos), N no es primo por lo que N = ab para algunos a,b diferentes de 1 y N, si hacemos lo mismo para a y luego para b, habremos factorizado N.

Ejemplo: Factorizar el número 72.



72 = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 = $2^3 \times 3^2$

Ejercicio: Factorizar el número 60

Nota: Hay una segunda parte del teorema fundamental de la aritmética que por ahora tomaremos como cierta. Esta dice que la factorización es única.

Teorema: Existen infinitos primos.

Demostración: Para demostrar esto supongamos lo contrario, hay una cantidad finita de primos. Escribamos en una lista todos los primos, sea P el producto de todos esos primos, P+1 no es divisible entre ningún primo de la lista, pero todo número es producto de primos, por lo que debe haber primos que no están en esa lista, una contradicción. Como nuestra suposición nos llevó a una contradicción, entonces esta era falsa y hay infinitos primos.

Ejemplo: ¿1009 es primo? Una primera idea es probar con todos los números menores a 1009 y ver si alguno lo divide.

Luego se nos ocurre la siguiente idea: Basta con probar con los números menores a 32 (Aproximadamente la raíz cuadrada de 1009). Esto se debe a que un número mayor a 32 necesita un número menor a 32 para que su producto sea 1009. (Si multiplicas dos números mayores a 32 el resultado es mayor a 1024) Por último, vemos que por el TFA basta con probar solo con los números primos. Lo que nos deja solo con 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 como opciones.

Ejercicio: ¿2017 es primo? ¿961 es primo?

Ejemplo: Determinar los números primos menores a 50. El algoritmo de la Criba de Eratóstenes nos permitirá hacer esto de manera eficiente. Empecemos con los números del 1 al 50. El 1 sabemos no es primo, lo tachamos. El 2 al no estar tachado es primo, tachamos todos sus múltiplos. El 3 al no estar tachado es primo, tachamos todos sus múltiplos. El 5 al no estar tachado es primo, tachamos todos sus múltiplos. El 7 al no estar tachado es primo, tachamos todos sus múltiplos. Hemos acabado, pues 8 se pasa de la raíz cuadrada de 50. Los números que quedaron sin tachar son primos.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

Ejercicio: Encuentra todos los números primos menores a 100. (Si acomodas los números en una tabla con 6 columnas será más fácil)

Ejercicio: ¿Por qué podemos detenernos cuando pasamos la raíz cuadrada? Observación: El número 12 tiene factorización en primos $2^2 \times 3^1$, y el número 60 tiene factorización $2^2 \times 3^1 \times 5^1$. Podemos ver que el 12 “forma parte” del 60, es decir 60 = 12x5, por lo que 12 es divisor de 60. Podemos generalizar esto de la siguiente forma “Cualquier divisor a de m se puede conseguir mediante el agrupamiento de algunos de sus factores primos”.

Ejemplo: Escribir todos los divisores de 12. La factorización en primos del 12 es $2^2 \times 3$, obtendremos todos sus divisores formando todos los posibles agrupamientos.

$2^0 \times 3^0 = 1$ $2^1 \times 3^0 = 2$ $2^2 \times 3^0 = 4$ $2^0 \times 3^1 = 3$ $2^1 \times 3^1 = 6$ $2^2 \times 3^1 = 12$

Ejercicio: Encuentra todos los divisores del 60.

Definición: El máximo común divisor de 2 números a y b, es el número más grande que divide tanto a a como a b, se escribe mcd(a,b) o simplemente (a,b).

Definición: El mínimo común múltiplo de 2 números a y b, es el número positivo más pequeño que es múltiplo tanto de a como de b, se escribe mcm[a,b] o simplemente [a,b].

Ejercicio: ¿Cuál es el máximo común múltiplo y el mínimo común divisor de 2 números?

Ejemplo: Calcular mcd(12, 90) La factorización en primos de 12 es $2^2 \times 3^1$ y de 90 es $2^1 \times 3^2 \times 5^1$. Como debe ser un divisor de 12 entonces puede tener a lo más dos 2’s y a lo más un 3.

Los números primos son especiales en la teoría de números al analizar los números enteros pues nos permiten construir todos los números mediante la multiplicación. Entonces pues los números primos serán los bloques sobre los que se construyen los números enteros.

Como vimos en el taller del jueves, todo número entero mayor a 1 se puede escribir como la multiplicación de potencias de números primos de una forma única. Esta representación se llama factorización en números primos o factorización canónica. Por ejemplo, $12 = 2^2 \times 3$, o por ejemplo $45 = 3^2 \times 5$. Lo importante de estas factorizaciones es que nos permiten conocer al número sin necesidad de calcularlo exactamente, podemos conocer algunas características como por ejemplo la cantidad de ceros al final del número al escribirlo, sólo conociendo el número de factores dos y cinco del número (pues el número tiene un cero al final por cada 10 que podamos formar con los factores del número, y esto es igual a la cantidad de parejas de 2 y 5 que podemos formar). Por ejemplo tenemos el siguiente problema:

Ejemplo. Tenemos el número $2^{2019} \times 5^{2022}$. ¿Cuántos dígitos tiene el número?

Aquí primero notamos que podemos agrupar los factores del número en 2019 parejas de un 2 con un 5 y nos sobrarán tres 5, pues $2^{2019} \times 5^{2022} = 2^{2019} \times 5^{2019} \times 5^3 = (2 \times 5)^{2019} \times 5^3$. Ahora bien, esas 2019 parejas se traducirán en el número en ceros al final del número, obteniendo al final

2019 ceros por esas parejas, sin embargo, todavía nos falta considerar los 3 factores cinco que nos sobraron, sabemos que $5^3 = 125$, por lo cual el número considerado será en total $125000...000$ con exactamente 2019 ceros. Por lo cual tendrá 2022 cifras en total.
Otra cuestión interesante está en como se ven las potencias perfectas (que son números enteros resultantes de elevar un número entero a alguna potencia - cuadrado, cubo, cuarta potencia, etc.) en su descomposición en primos, hagamos algunos ejemplos:
$64 = 4^3 = 2^6$
$144 = 12^2 = 2^4 \times 3^2$
$10000 = 10^4 = 2^4 \times 5^4$
¿Te diste cuenta de algo? Si te fijas bien, todos los exponentes en la factorización de cada una de las potencias perfectas es múltiplo del exponente del cual es potencia perfecta, por ejemplo 64 es un cubo perfecto, y los exponentes de su factorización en primos (6) son múltiplos de 3. 144 es un cuadrado perfecto y los exponentes de su factorización en primos (4 y 2) con múltiplos de 2.
Esto se puede observar fácilmente usando las leyes de los exponentes, si recordamos, una de las leyes de los exponentes nos dice que si tenemos una multiplicación elevada a un exponente, entonces podemos separar esa potencia en la multiplicación de dos potencias que tengan ese mismo exponente, es decir:

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

Por ejemplo, $6^5 = (2 \times 3)^5 = 2^5 \times 3^5$
Así pues, observamos que en los ejemplos pasa lo siguiente:
$64 = 4^3 = (2^2)^3 = 2^6$
$144 = 12^2 = (2^2 \times 3)^2 = (2^2)^2 \times (3)^2 = 2^4 \times 3^2$
$10000 = 10^4 = (2 \times 5)^4 = 2^4 \times 5^4$
También aquí hacemos notar otra de las leyes de los exponentes, que es la ley que habla sobre una potencia elevada a un exponente. Esta ley nos dice que si elevamos una potencia a un nuevo exponente, podemos expresarla como una potencia con exponente igual a la multiplicación de los exponentes que teníamos:

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

Por ejemplo, al elevar $25^7 = (5^2)^7 = 5^{2\times 7} = 5^{14}$
Hagamos un ejemplo para ver cómo aplicarlo:
Ejemplo. Encuentre el menor número tal que es un cubo perfecto y al dividirlo entre 2 es un cuadrado perfecto.
Aquí, derivado de la explicación anterior, sabemos que un número cubo perfecto debe de tener todos su exponentes en su factorización en primos como múltiplos de tres y que un cuadrado perfecto debe de tener todos sus exponentes pares en su factorización en primos. Ahora pues, el único factor que está obligado a tener el número es el factor 2, pues nos habla de dividirlo entre 2, por lo cual necesitamos un exponente para ese dos que sea múltiplo de 3. Ahora bien al exponente de la factorización al dividirlo entre dos se le restará 1, pues por las leyes de los exponentes $2^a \div 2 = 2^{(a-1)}$; es decir se le restará uno al exponente del dos al dividirlo entre dos.
Por lo cual queremos que ese exponente al restarle uno sea para, o lo que es lo mismo que el

exponente en sí sea impar. Por lo tanto buscamos un exponente impar y que sea múltiplo de 3. El número más pequeño que cumple eso es el 3. Por lo cual el menor número que cumple lo pedido es $8 = 2^3$. Es fácil verificar que cumple lo pedido.
Ahora veamos otras observaciones interesantes con la factorización en números primos:
Veamos que pasa con la factorización de un número y la de sus divisores. Al hacer la división de un número entre otro, podemos simplemente ir cancelando los factores iguales en su factorización en primos, por ejemplo: $\frac{24}{180} = \frac{2^3 \times 3}{2^2 \times 3^2 \times 5}$, aquí podemos eliminar dos factores 2 de ambos términos, así como un factor 3, resultando $\frac{24}{180} = \frac{2^1}{3^1 \times 5} = \frac{2}{15}$. Haciendo esto, podemos reducir fracciones de una manera más sencilla, o incluso hacer divisiones, ahora, está claro que en el ejemplo, la divisiòn nunca podrà ser entero porque abajo hay un 5 que no podremos eliminar arriba porque no hay cincos y por que abajo hay un tres de más que arriba que tampoco se podrá elimina.
Queda claro entonces que un número no puede ser dividido entre otro que no forma parte de su descomposición en primos, ¿no? Porque no se puede eliminar o reducir la fracción. Pero también hay otras restricciones en la divisibilidad. ¿Qué pasa si dividimos entre $12 \div 8$? $8 = 2^3$ y $12 = 2^2 \times 3$. Podremos eliminar sólo dos de los factores de abajo, pero nos sobraría uno: $12 \div 8 = 2^3 \div (2^2 \times 3) = \frac{3}{2^1}$. Ya no tenemos primos que podamos eliminar, y como 2 no divide a 3, entonces 8 no divide a 12. ¿Cómo saber si un número a no es divisible entre otro número b? Te pondré una lista de condiciones en base a lo que hemos visto:
1. Si b es mayor, el resultado será menor que 1, por lo que nunca obtendremos un entero.
2. Si b tiene factores primos que no se encuentran en la representación de a.
3. Si alguno de los primos de b tiene un exponente mayor al del mismo primo en la descomposición de a.
Basta con que se cumpla una sola para saber que un número no será divisible entre otro. Por ello no debe cumplirse ninguna para que el número sí sea divisible.
Ahora bien, derivado de lo anterior, será fácil también conocer el número de divisores de un número sabiendo su descomposición en números primos. Por ejemplo, el $12 = 2^2 \times 3$. Para tener un divisor del 12 necesitamos un número que tenga sólo al 2 o 3 en su factorización en primos, y que a lo más tenga dos factores 2 y a lo más dos factores 1. Entonces el problema de encontrar el número de divisores que tiene se reduce a un problema de conteo de combinatoria, pues:
Tenemos tres opciones para el exponente del factor 2 en el posible divisor (0, 1 o 2)
Tenemos dos opciones para el exponente del factor 3 en el posible divisor (0 o 1), es decir ponerlo o no ponerlo.
Usando el conteo y el principio multiplicativo, nos resultan seis opciones para la factorización del divisor, por lo tanto el número 12 tendrá exactamente seis divisores.

	3^0	3^1
2^0	$2^0 \times 3^0 = 1$	$2^0 \times 3^1 = 3$

2^1	$2^1 \times 3^0 = 2$	$2^1 \times 3^1 = 6$
2^2	$2^2 \times 3^0 = 4$	$2^2 \times 3^1 = 12$

Por lo cual son seis divisores de 12 y son los números 1, 2, 3, 4, 6 y 12.
La fórmula general para un número n con una factorización en primos $n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times ... p_k^{a_k}$, será $(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)...(a_k+1)$ donde $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ son los exponentes de los primos en la factorización del número.

Problemas

<u>Números primos</u>

Problema 1. Determina todos los primos entre 1 y 50

Problema 2. Encuentra todos los números primos positivos menores a 100. ¿Cuántos son?

Problema 3. ¿Es 2011 primo?

Problema 4. Encuentra todos los números primos p y q tales que p+q=pq

Problema 5. El producto de un número de dos cifras con uno de tres cifras es 23,871. ¿Cuánto vale su suma?

<u>Factorización de números</u>

Problema 6. El producto de tres enteros positivos es 180 y su suma es 23. ¿Cuál es el mayor de esos tres números?

Problema 7. Hugo abre su libro de matemáticas y observa que el producto de los números de las dos páginas es 1806. ¿Cuánto vale la suma de los dos números?.

Problema 8. Hugo olvido la contraseña de su computadora. Como Hugo es muy precavido, anotó en su libreta que lo siguiente: La contraseña es un número de cuatro dígitos, el 6 no es uno de los dígitos y el producto de los dígitos es 420. ¿Cuál es la suma de los dígitos de la contraseña de Hugo?

Problema 9. ¿Cuál es la mayor potencia de 2 que divide al resultado de la suma $1+2+3+...+10^{11}$?

Problema 10. Encuentra la descomposición canónica de 6916

Problema 11. El producto de los dígitos de un número de cuatro cifras es 810. Si ninguno de los dígitos se repite, la suma de estos dígitos es:

Problema 12. Toño suma los número del 1 hasta el 10^{2019}. ¿Cuántos factores dos tiene el resultado en su factorización en primos?

Problema 13. ¿Es $2^9 \times 3$ divisible por 2?

Problema 14. ¿Es $2^9 \times 3$ divisible por 5?

Problema 15. ¿Es $2^9 \times 3$ divisible por 8?

Problema 16. ¿Es $2^9 \times 3$ divisible por 9?

Problema 17. ¿Es $2^9 \times 3$ divisible por 6?

Problema 18. En cada cara de un cubo se escribe un número entero positivo. En cada vértice del cubo, se escribe la multiplicación de las tres caras en las que aparece ese vértice como esquina. Se suman los números escritos en cada uno de los vértices, dando el resultado de 5005.

Problema 19. El producto de tres enteros mayores que 1 y distintos entre sí es 100. ¿Cuáles son los tres enteros?
Problema 20. ¿Es cierto que si un número es divisible por 4 y 3, entonces es divisible por 12?
Problema 21. ¿Es cierto que si un número natural es divisible por 4 y 6, entonces es divisible por 24?
Problema 22. Factoriza el número 420
Problema 23. El número A no es divisible por 3. ¿Es posible que 2A sea divisible por 3?
Problema 24. Demuestra que la multiplicación de 5 enteros consecutivos es múltiplo de 120
Problema 25. Demuestra que la multiplicación de 4 enteros consecutivos siempre es múltiplo de 24
Problema 26. Halla todas las ternas de números enteros positivos a ≤ b ≤ c primitivas (es decir, que no tengan ningún factor primo común) tales que cada uno de ellos divide a la suma de los otros dos.
Problema 27. Dado un entero positivo n, hallar la suma de todos los enteros positivos inferiores a 10n que no son múltiplos de 2 ni de 5.

Ceros al final de un número

Problema 28. ¿Cuántas cifras tiene el número $2^{2009} \times 5^{2013}$?
Problema 29. ¿Cuántas cifras tiene el número $2^{1998} \times 5^{2002}$?
Problema 30. ¿Cuántas cifras tiene el número $3^2 \times 2^{2017} \times 5^{2018}$?
Problema 31. ¿Qué número es mayor $2^{1999} \times 3^{2003} \times 5^{2001}$ o $2^{2003} \times 3^{2015} \times 5^{1999}$?
Problema 32. ¿Cuál es la suma de los dígitos de $2^{2017} \times 5^{2020}$?

Factorización de potencias perfectas

Problema 33. ¿Cuál es el menor número por el que debes multiplicar a 750 para obtener un cuadrado perfecto?
Problema 34. Encuentre el menor número tal que es un cubo perfecto y al dividirlo entre 2 es un cuadrado perfecto.
Problema 35. Sea n un entero mayor que cero tal que los números n × 1998 y n × 2695 son cuadrados perfectos.
Problema 36. ¿Cuál es el menor número tal que al dividirlo entre 2 resulta un cuadrado perfecto y al dividirlo entre 3 resulta un cubo perfecto?
Problema 37. Encuentre el menor número tal que al multiplicarlo por 2 es un cuadrado perfecto, al multiplicarlo por 3 resulta un cubo perfecto y al multiplicarlo por 5 resulta una quinta potencia perfecta.
Problema 38. El número $25^{64} \times 64^{25}$ es el cuadrado de un entero positivo N. ¿Cuál es la suma de los dígitos de N?
Problema 39. Demuestra que si el cuadrado de un número divide al cuadrado de otro número, entonces el primer número divide al segundo.

Factorización de números factoriales, divisibilidad repetida

Problema 40. Jimena multiplica los números del 1 al 2012 ($1 \times 2 \times 3 \times ... \times 2011 \times 2012)$ y posteriormente el resultado lo divide entre 14 sucesivamente hasta que el resultado ya no dé entero. ¿Cuántas veces dividió el número entre 14?
Problema 41. ¿Cuántos ceros hay al final de $10!$?

Problema 42. ¿Cuántos ceros hay al final de $100!$?

Problema 43. Alice y Bob juegan un juego, empiezan con el número 100! escrito en el pizarrón, juegan alternando turnos, en cada turno se borra el número del pizarrón y en su lugar se escribe la tercera parte del número que estaba. Pierde el que escriba un número que no es entero. Si empieza Alice ¿Quién gana?

Problema 44. Encuentra una forma general para saber cuántos ceros al final hay de n!

<u>Divisores y Número de divisores</u>

Problema 45. Encuentra la menor pareja de números enteros consecutivos tales que cada uno de ellos tiene exactamente 6 divisores.

Problema 46. Escribe todos los divisores positivos del 168

Problema 47. ¿Cuántos divisores tiene el número 96?

Problema 48. Determina cuántos enteros positivos dividen a $5^8 + 2 \times 5^9$

Problema 49. ¿Cuántos divisores tiene el número 25? ¿Y el número 100? Demuestra que la única forma en que puede un número tener una cantidad impar de divisores, es que el número sea un cuadrado perfecto.

Problema 50. ¿Cuántos números dividen a 360?

Problema 51. Se ordenan de menor a mayor los enteros positivos a_i que tienen exactamente 3 divisores: $a_1 < a_2 < a_3 < ...$ ¿Qué número es a_6?

Problema 52. Se ordenan de menor a mayor los enteros positivos a_i que tienen exactamente 7 divisores: $a_1 < a_2 < a_3 < ...$ ¿Qué número es a_3?

Problema 53. ¿Cuántos divisores tiene el $10!$?

Problema 54. ¿Cuánto vale la multiplicación de los divisores del $10!$?

Problema 55. ¿Cuánto es la suma de los divisores de $10!$?

Problema 56. Demuestra que el número de divisores de un número N, siempre es menor o igual a $2\sqrt{N}$.

Problema 57. Un número natural n, múltiplo de 83, es tal que su cuadrado tiene 63 divisores. Hallar n sabiendo que es el menor número que cumple las condiciones anteriores.

Problema 58. La factorización en primos de N es $p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} ... p_r^{a_r}$

1) ¿Cuántos divisores tiene? 2) ¿Cuánto es el producto de sus divisores?
3) ¿Cuánto es la suma de sus divisores?

<u>Máximo común divisor y mínimo común múltiplo</u>

Problema 57. ¿Cuántos enteros positivos dividen tanto a 360 como a 600?

Problema 58. Encuentra el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de A y B, siendo $A = 2^8 \times 5^3 \times 7$ y $B = 2^5 \times 3 \times 5^7$

Problema 59. Demuestra que si n es divisible por 12 y 18, entonces n es divisible entre 36.

Problema 60. Demuestra que si n divide a 12 y n divide a 18, entonces n divide a 6

Problema 61. Encuentra el mcd y el mcm de 168 y 420

Problema 62. ¿Cómo puedes obtener el mínimo común divisor y el máximo común múltiplo de dos números?

Problema 63. Dos números cuyo mcd es 18, multiplicados dan 720, encuentra el mcm.

Problema 64. Demuestra que mcd(a,b) * mcm[a,b] = ab

Problema 65. Demuestra que si a y b son tales que mcd(a, b) + mcm[a, b] = a + b, entonces alguno divide al otro.