Olimpiada Básica de Matemáticas en Guanajuato

@OBMGuanajuato | 9 de octubre del 2022

Teorema de la bisectriz

Alfredo Hernández Estrada

1. Introducción

Primero que nada iniciemos recordando que es una bisectriz y cuales son sus propiedades

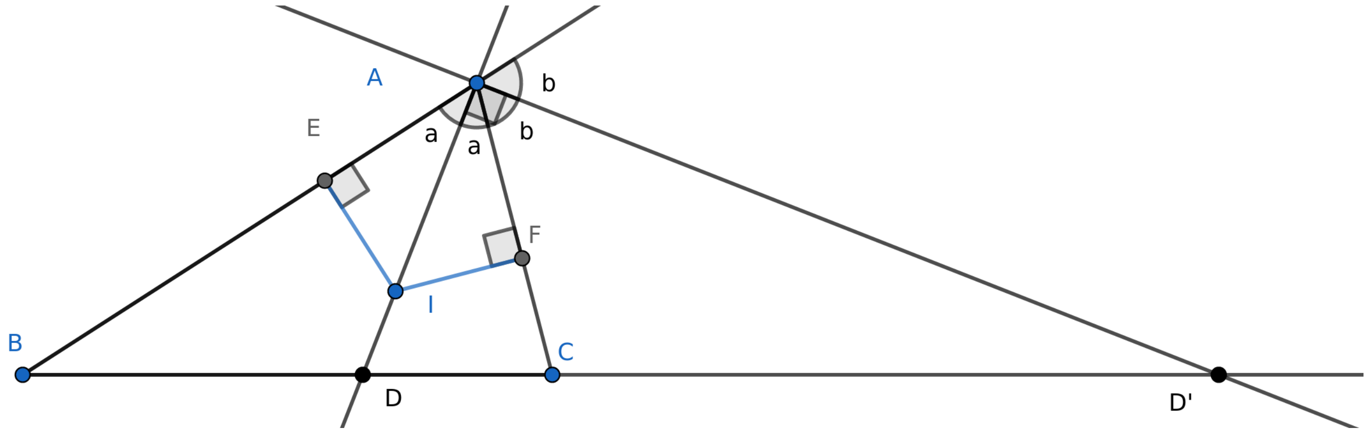


Figura 1: Bisectriz interna y externa de $\angle A$ en un triangulo $\triangle ABC$.

- La bisectriz es la recta que divide un ángulo en dos ángulos iguales, en la figura AD es la bisectriz de $\angle BAC$.
- Si bien no lo usaremos en este documento, es importante recordar que la bisectriz interna equidista de los lados del angulo al cual biseca, esto es en (1) $IF = IE$ para cualquier punto I sobre la bisectriz.
- La bisectriz exterior de un ángulo es perpendicular a la bisectriz interior del mismo.

Teorema 1 (De la bisectriz) *Sea ABC un triangulo y AD un segmento con D sobre BC, entonces se cumple la siguiente igualdad*

$$\frac{BA}{AC} = \frac{BD}{DC},$$

si y solo si, AD es bisectriz del ángulo A.

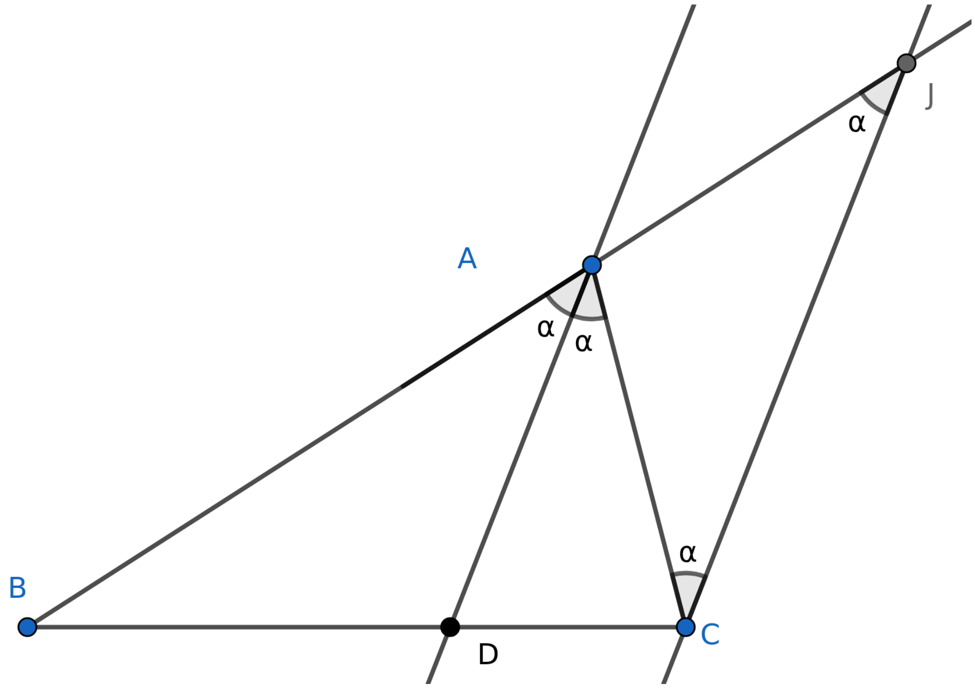
Demostración:

($\Rightarrow$) Consideremos la paralela por C a la recta AD, que intercepta a BA en un punto J. Notemos entonces que se cumple la siguiente igualdad de ángulos dada por la bisectriz y la paralela

$$\angle BAD = \angle DAC = \angle ACJ = \angle AJC,$$

y esto nos dice que $\triangle ACJ$ es un triangulo isosceles, con $AC = AJ$. Por otro lado por el Teorema de Thales sobre las paralelas AD y JC tenemos la siguiente igualdad

$$\frac{BA}{AJ} = \frac{BD}{DC},$$



y por lo tanto, sustituyendo AC por AJ tenemos que

$$\frac{BA}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que

$$\frac{BA}{AC} = \frac{BD}{DC},$$

y prolonguemos el segmento BA hasta el punto J tal que $AC = AJ$, con lo que $\angle AJC = \angle ACJ$. Tenemos entonces que se cumple que

$$\frac{BA}{AJ} = \frac{BD}{DC},$$

y por el Teorema de Thales se cumple que $AD \parallel JC$. y por ángulos correspondientes

$$\angle AJC = \angle BAD,$$

y por alternos internos

$$\angle ACJ = \angle CAD.$$

con lo que tenemos entonces que

$$\angle CAD = \angle BAD,$$

y por lo tanto AD es bisectriz, con lo que concluimos. ■

Si bien por lo general es mas común usar el resultado una ves que conocemos alguna bisectriz, es importante tener siempre en mente que el reciproco también es verdadero. Esto es sobre todo útil si lo que buscamos es una igualdad de ángulos. Además puede ser útil recordar la idea usada en la demostración, ambas construcciones pueden ser sobre todo útiles en construcciones similares, dándonos datos extra a los conocidos.

2. Problemas

1. *La bisectriz del* $\angle ABC$ *de un triangulo* ABC *intercepta al circuncírculo del mismo en un punto* D*, demuestra que* $AD = DC$.

2. *En un triangulo,* AE *es la bisectriz del ángulo exterior* $\angle CAD$ *que intercepta* BC *en* E*. Si* $AB = 10$, $AC = 6$ *y* $BC = 12$*, encuentra el valor de* CE.

3. *En un triangulo* ABC *sean* D*,* E *y* F *los pies de las perpendiculares, y* H *el ortocentro de* ABC*. Demuestra que* H *es el incentro del* ABC.

4. *En un triangulo* ABC*, con* $AB = 20$ *y* $AC = 10$*. Sea* P *el punto sobre* BC *tal que*

$$BP = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$
$$CP = \frac{10\sqrt{3}}{3},$$

   encuentra el valor de $\angle BAP - \angle CAP$.

5. *Un triangulo* $\triangle ABC$ *tiene lados de medidas enteras,* BD *es la bisectriz del ángulo en* B*, si* $AD = 3$ *y* $DC = 8$*. ¿Cuál es el menor perímetro posible del triangulo* ABC*?*

6. *Demuestra que si la bisectriz de un triangulo pasa por el punto medio del lado opuesto al ángulo entonces el triangulo es isocesles.*

7. *Demuestra el Teorema de la bisectriz externo, el cual es análogo a el Teorema original, salvo que el segmento* AD *es una bisectriz externa.*

8. ** ABC es un triangulo con* $BC = a$*,* $CA = b$*, y* $\angle BCA = 120°$*,* CD *es la bisectriz de* $\angle BCA$ *con* D *sobre* AB*. Encuentra la longitud de* CD.

9. *Sea* $\triangle ABC$ *un triangulo isosceles con* $AB = AC$*. Sea* AD *la bisectriz del* $\angle ABC$ *con* D *sobre* AC *y* $BC = BD + AD$*. Encuentra* $\angle BAC$.

10. *Dado un triangulo* ABC *con* $\angle ACB = 48°$*. La bisectriz de* $\angle BAC$ *intercepta el lado* BC *del triangulo en los punto* D *y al circuncírculo del* ABC *en el punto* E*, respectivamente. Si* $AC = AB + DE$*, entonces* $\angle ABC$.

11. *En el cuadrado* $ABCD$ *el punto* H *es el punto medio del lado* CD*, y* K *es el punto en el lado* BC *tal que* $KC = 2KB$*, demuestra que* KA *es la bisectriz del* $\angle BHK$.

12. *En un triangulo* ABC *exixte un punto sobre el lado* AC *tal que* $BD^2 = AD \cdot CD$*. Demuestra que* BD *es la bisectriz del* $\angle ABC$.

13. *En un triangulo* ABC *sea* AD *la bisectriz del angulo* A*,*