TALLER DE ENTRENAMIENTO PARA SEMIFINAL
Sábado 13 de abril y jueves 18 de mayo

Elaborado por: Gustavo Meza García

Teorema de Tales.

Simbología:

AB || CD	AB es paralela a CD
[ABC]	Área del triángulo ABC

Teorema:

1) (Teorema de Tales 1) Sea ABC un triángulo, sea D un punto en AB, y E un punto en AC. Si $DE \,||\, BC$entonces $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.
    a) La demostración se hará como problema.

Problema (Demostración guiada):

1) Demuestra que si 2 triángulos tienen la misma altura, entonces la razón entre sus áreas es la razón entre sus bases
2) En la figura del Teorema de Tales 1. Demuestra que $\frac{[ADE]}{[BDE]} = \frac{AD}{DB}$
3) Demuestra que $\frac{[AED]}{[CED]} = \frac{AE}{EC}$
4) Demuestra que $[BDE] = [CDE]$
5) Demuestra el teorema de Tales 1.

Ejercicios:

1) Sea ABC un triángulo, sea D un punto en AB, y E un punto en AC. Demuestra que si $DE \,||\, BC$entonces $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.
2) (Teorema de Tales 2) Sean O,P,Q tres puntos en una recta, sean M,N,T tres puntos en otra recta. De forma que OM || PN || QT. Demuestra que $\frac{OP}{PQ} = \frac{MN}{NT}$.

Teorema:

1) (Recíproco del Teorema de Tales 1) Sea ABC un triángulo, sea D un punto en AB, y E un punto en AC. Si$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ entonces DE || BC.

(Recíproco del Teorema de Tales 2) Sean O,P,Q tres puntos en una recta, sean M,N,T tres puntos en otra recta. De forma que OM || QT. Si $\frac{OP}{PQ} = \frac{MN}{NT}$ entonces

OM || PN || QT. (Cuidado: En este teorema <u>debes tener 2 paralelas</u> para obtener que la tercera es también paralela)

TALLER DE ENTRENAMIENTO PARA SEMIFINAL
Sábado 13 de abril y jueves 18 de mayo
Elaborado por: Gustavo Meza García

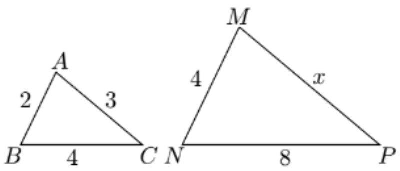
Semejanza y congruencia

Definición: Que 2 triángulos sean semejantes significa que sus ángulos correspondientes son iguales.
Teorema:

1) Los lados correspondientes de dos triángulos semejantes son proporcionales
    a) Demostración: Sea ABC y DEF dos triángulos semejantes con $\measuredangle A=\measuredangle D$, $\measuredangle B=\measuredangle E$ y $\measuredangle C=\measuredangle F$. Movamos el triángulo DEF de forma que A=D y E este en la recta AB. Como $\measuredangle A=\measuredangle D$, tenemos que F está en la recta AC y como $\measuredangle B=\measuredangle E$ tenemos que EF es paralela a BC, por el teorema de Tales 1 tenemos que $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$. Si hacemos lo mismo, pero ahora con el vértice B y E, llegamos a que $\frac{BA}{ED}=\frac{BC}{EF}$, por lo que $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}$que era lo que queríamos.

Ejercicio:

Ejemplo 1.4.1 *Tenemos dos triángulos semejantes $\triangle ABC$ y $\triangle MNP$. Sabemos que sus lados son iguales a los valores marcados en la siguiente figura, encuentra cuánto vale x.*



Teorema:

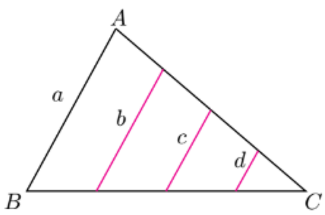
1) (Criterios de Semejanza) Podemos saber que 2 triángulos son semejantes cuando
    - 2 de los 3 ángulos correspondientes sean iguales (AA)
    - Tienen un ángulo correspondiente igual y los lados que forman ese ángulo son proporcionales (LAL) (Cuidado: El ángulo debe estar entre las rectas, no LLA)
    - Los 3 lados correspondientes son proporcionales. (LLL)

Definición: Dos triángulos semejantes en la que la constante de proporcionalidad es 1 (Los lados correspondientes miden lo mismo) se dice que son congruentes.
Problema:

1) ¿Cómo quedan los criterios de semejanza cuando los triángulos son congruentes?

Problemas

Problema 1.16 *En la siguiente figura los segmentos a, b, c y d son paralelos y dividen al lado BC en 4 segmentos iguales. Si $a=10$, encuentra la suma $a+b+c+d$.*



TALLER DE ENTRENAMIENTO PARA SEMIFINAL
Sábado 13 de abril y jueves 18 de mayo
Elaborado por: Gustavo Meza García

- Demuestre que el segmento entre los puntos medios de dos lados de un triángulo mide la mitad de la longitud del tercer lado y es paralelo a ese lado.
- Sean a y b dos medianas de un triángulo que se intersectan en un punto p. Pruebe que p divide a a en dos segmentos que miden un tercio y dos tercios de lo que mide a respectivamente.
- Calcule el valor de la altura de un tetraedro regular en el que todas las aristas miden 1.
- Sea ABC un triángulo con alturas AD y BE. AD y BE se intersectan en H. Sea F el punto medio de AH, G el punto medio de AB y K el punto medio de BC. Demuestra que el ángulo FGK es de 90°

Problema 1.17 *Sea $ABCD$ un paralelogramo en el que L y M son puntos medios de AB y CD, respectivamente. Demuestra que los segmentos LC y AM dividen la diagonal BD en tres segmentos iguales.*

- (Teorema de Varignon) (El favorito de Tzoali xD) Demuestra que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero forman un paralelogramo.
  a) Demuestra que el perímetro del paralelogramo es igual a la suma de las diagonales
  b) Demuestra que el área del paralelogramos es la mitad del área del cuadrilátero

Problema 1.25 *En un triángulo $\triangle ABC$, sobre el lado BC se toma un punto D de tal manera que $\angle BAD = \angle ACB$. Demuestra que $(AB)^2 = BD \cdot BC$.*

- Demuestra que los lados opuestos de un paralelogramo miden lo mismo.

Problema 1.18 *Demuestra que las diagonales en un paralelogramo se cortan en su punto medio.*

Problema 1.19 *Sea AM la mediana trazada hacia el lado BC de un triángulo $\triangle ABC$. Prolongamos AM más allá del punto M y tomamos un punto N de tal manera que AN es el doble de AM. Demuestra que el cuadrilátero $ABNC$ es un paralelogramo.*

Ejercicio 1.10.15 *(i)* Si ambos pares de lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
(ii) Si dos lados de un cuadrilátero son paralelos y congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

- Sea ABC un triángulo rectángulo con $\angle A = 90°$, sea H la altura desde A hasta BC, demuestra que:
  - $BH \cdot HC = AH^2$
  - $BH \cdot BC = AC^2$

Problema 1.20 *Demuestra que el segmento de línea, que une los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrilátero, bisecta el segmento de línea que une los puntos medios de las diagonales.*

Problema 1.21 *En un paralelogramo $ABCD$ se escogen los puntos E y F sobre la diagonal AC de manera que $AE = FC$. Si BE se extiende hasta intersectar AD en H, y BF se extiende hasta intersectar DC en G, demuestra que HG es paralelo a AC.*

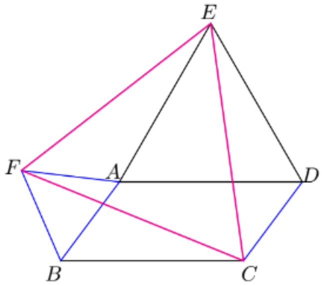
TALLER DE ENTRENAMIENTO PARA SEMIFINAL
Sábado 13 de abril y jueves 18 de mayo

Elaborado por: Gustavo Meza García

Tarea

Problema 1.23 *Sobre los lados AB y AC de un triángulo $\triangle ABC$ se construyen hacia afuera los cuadrados $ABNM$ y $CAPQ$. Sea D el punto medio del lado BC. Demuestra que $PM = 2 \cdot AD$.*

Ejemplo 1.4.2 *En la siguiente figura, $ABCD$ es un paralelogramo. Sobre los lados AB y AD se dibujan los triángulos equiláteros $\triangle ABF$ y $\triangle ADE$, respectivamente. Demuestra que el triángulo $\triangle FCE$ es equilátero.*



Ejercicio 1.10.11 En el triángulo ABC sabemos que el ángulo CBA es el doble del ángulo BCA, el lado CA es 2 unidades mayor que el lado AB y BC mide 5. ¿Cuánto miden AB y CA?

Ejemplo 1.4.3 *Sea Z un punto sobre el lado AB de un triángulo $\triangle ABC$. Una línea a través de A paralela a CZ intersecta a BC en X. Una línea a través de B paralela a CZ intersecta a AC en Y. Demuestra que*

$$\frac{1}{CZ} = \frac{1}{AX} + \frac{1}{BY}.$$

Problema 1.24 *Demuestra que la recta que une los puntos medios de los lados paralelos de un trapecio pasa por el punto de intersección de las diagonales.*

Problema 1.28 *En un trapecio $ABCD$ (AB paralelo a DC) sea $AB = a$ y $DC = b$. Sean M, N, P y Q los puntos medios de AD, BD, AC y BC, respectivamente. Demuestra que*

(a) $MQ = \frac{a+b}{2}$

(b) $NP = \frac{|a-b|}{2}$

Problema 1.29 *En un trapecio $ABCD$ (AB paralelo a DC) sea $AB = a$ y $DC = b$. Supongamos que $\measuredangle ADC + \measuredangle BCD = 90°$. Sean M y N los puntos medios de AB y DC, respectivamente. Demuestra que*

$$MN = \frac{b-a}{2}.$$

1. Consider heights AA_1 and BB_1 in acute triangle ABC. Prove that $A_1C \cdot BC = B_1C \cdot AC$.

2. Consider height CH in right triangle ABC with right angle $\angle C$. Prove that $AC^2 = AB \cdot AH$ and $CH^2 = AH \cdot BH$.

4. On side BC of $\triangle ABC$ point A_1 is taken so that $BA_1 : A_1C = 2 : 1$. What is the ratio in which median CC_1 divides segment AA_1?

5. Square $PQRS$ is inscribed into $\triangle ABC$ so that vertices P and Q lie on sides AB and AC and vertices R and S lie on BC. Express the length of the square's side through a and h_a.