Suma de dígitos y otros asuntos de dígitos

1. Teoría

Así es, hay teoría de sumas de dígitos. En lo que sigue, la suma de dígitos de un entero ~~no~~ positivo n se denotará como $s(n)$.

i) Muestra que si m y n son enteros positivos, entonces

$$s(m) + s(n) = s(m+n) + 9A,$$

donde A es el número de acarreos al hacer la suma $m+n$. Observa que esto implica también que $s(m) + s(n) \geq s(m+n)$

ii) Muestra que si m y n son enteros positivos, entonces

$$s(m) \cdot s(n) \geq s(mn)$$

Utiliza alguno de los dos resultados anteriores para resolver este problema:

Encuentra todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes enteros tales que, para cada entero $n \geq 2016$, el número $P(n)$ es positivo y

$$S(P(n)) = P(S(n))$$

iii) Muestra que, si k y m son enteros positivos tales que k está entre 1 y 10^m, inclusive, entonces $s((10^m - 1)k) = 9m$. Usa este resultado para resolver el problema 1 de la Ibero del 2014:

Encuentra el menor entero positivo n tal que

$$s(n) = s(2n) = \ldots = s(2014n)$$

iv) Muestra que si $n = 111\ldots1$, donde n tiene m dígitos, entonces $s(nk) \geq m$ para cualquier entero positivo k. ¿Este resultado se aplicará a otras bases? Úsalo para resolver el siguiente problema:

Un entero positivo se dice *brillante* si puede ser expresado de la forma

$$2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{100}},$$

donde $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ son enteros no negativos, no necesariamente distintos. Encuentra el menor entero positivo n tal que ningún múltiplo de n es un número brillante.

2. Problemas

Si llegamos a esta parte es que "son expertos, Bob: ¡Expertos!". Los problemas no son necesariamente más difíciles que los de la sección anterior, los primeros son "ejercicios" con aplicación fácil de lo ya antes visto. Luego, los problemas ya no necesariamente salen con la teoría del bloque anterior.

1. Muestra que cada entero positivo n tiene un múltiplo cuya suma de dígitos es igual a n.

2. Encuentra $s(9 \cdot 99 \cdot 9999 \cdot \ldots \cdot 999 \cdots 9)$, donde el último número tiene 2^n dígitos 9.

3. Sea $p(n)$ el producto de los dígitos de un entero positivo n. Muestra que existen infinitos n tales que $p(n) = s(n)^2$.

4. Para un entero positivo m denotamos por $P(m)$ el producto de los dígitos de m. Muestra que para cada entero positivo n, existen enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ que satisfacen las siguientes condiciones:

$$S(a_1) < S(a_2) < \cdots < S(a_n) \text{ y } S(a_i) = P(a_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

(Aquí $a_{n+1} = a_1$.)

5. Determina si existe una progresión aritmética infinita de enteros positivos, tal que todos sus términos tengan la misma suma de dígitos.

6. Encuentra todos los enteros positivos que tienen algún múltiplo capicúa.

7. Muestra que existe una potencia de 2 con una sucesión de 2017 dígitos consecutivos iguales a 0.