Olimpiada Básica de Matemáticas en Guanajuato

@OBMGuanajuato | 9 de octubre del 2022

Resolución de Ecuaciones de Primer Grado

Ángel Manuel González López

1. Introducción

1.1. Propiedades de igualdades

La igualdad se indica con el signo " = " entre dos expresiones, las igualdades cumplen las siguientes propiedades:

- **Propiedad reflexiva:** Todo número es igual a si mismo.
- **Propiedad de simetría:** Si un número es igual a otro, éste es igual al primero.
- **Propiedad transitiva:** Si un número es igual a un segundo número y éste es igual a un tercero, el primero y el tercero son iguales.
- **Propiedad de sustitución:** Si un número es igual a otro, en cualquier expresión en que aparezca el primero puede reemplazarse por el segundo.
- **Propiedad aditiva de la igualdad:** Si sumamos el mismo número a ambos lados de la igualdad, la igualdad permanece.
- **Propiedad multiplicativa de la igualdad:** Si multiplicamos el mismo número en ambos lados de la igualdad, la igualdad permanece.

Las podemos ejemplificar para que queden más claras

Propiedad reflexiva:	$a = a$	$5 = 5$
Propiedad de simetría:	$a = b \Rightarrow b = a$	$x = 4 \Rightarrow 4 = x$
Propiedad transitiva:	$a = b$ y $b = c \Rightarrow a = c$	$x = 4$ y $4 = z \Rightarrow x = z$
Propiedad de sustitución:		$x = 4 \Rightarrow 2 \cdot x + 3 = 2 \cdot 4 + 3$
Propiedad aditiva de la igualdad:	$a = b \Rightarrow a + c = b + c$	$x = 4 \Rightarrow x + 2 = 4 + 2$
Propiedad multiplicativa de la igualdad:	$a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$	$x = 4 \Rightarrow x.2 = 4.2$

1.2. Propiedades de los números

Los números con los que trabajamos[1] tiene dos operaciones la suma (adición) y la multiplicación (producto), estas dos operaciones cumplen las siguientes propiedades (más adelante veremos que sucede con la multiplicación y división).

	Adición	Producto
Conmutatividad	$x+y=y+x$	$x\cdot y=y\cdot x$
Asociatividad	$(x+y)+z=x+(y+z)$	$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$
Neutro	$x+0=x$	$x\cdot 1=x$
Inverso	$x+(-1)=0$	$x\cdot(1/x)=1$
Distributividad	$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$	

La resta la definimos como la suma del inverso aditivo, es decir $3-2=3+(-2)$, del mismo modo la división la definimos como la multiplicación del inverso multiplicativo $15\div 3=15\cdot 1/3$

[1]los números que usualmente usamos se llaman reales y se denota por $\mathbb{R}$

Recalquemos que hay varias formas para denotar el producto

$$5 \cdot 3 = 5 \times 3 = (5)(3),$$

del mismo modo hay varias formas para denotar la división

$$15 \div 3 = 15/3 = \frac{15}{3}$$

Cuando usamos literales también tenemos la mismas notaciónes para el producto solo que se le agregan unas cuantas

$$x \cdot 3 = x \times 3 = (x)(3) = 3x,$$

y también

$$x \cdot y = x \times y = (x)(y) = xy$$

1.3. Operaciones con fracciones

Antes de que veamos ejemplos para despejar hay que asegurarse que sabemos hacer operaciones con fracciones para no tener problem

as en ningún paso, así que las 4 operaciones con fracciones se hacen del siguiente modo:

- $\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{xw+zy}{yw}$.
- $\frac{x}{y} - \frac{z}{w} = \frac{xw-zy}{yw}$.
- $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{xz}{yw}$.
- $\frac{x}{y} \div \frac{z}{w} = \frac{xw}{yz}$.

La división de fracciones también la podemos expresar como " La regla del sándwich " del siguiente modo

$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{w}} = \frac{xw}{yz}.$$

Véase los siguientes ejemplos

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot 4}{4 \cdot 5} = \frac{15 + 8}{20} = \frac{23}{20}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 - 2 \cdot 4}{4 \cdot 5} = \frac{15 - 8}{20} = \frac{7}{20}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 2} = \frac{15}{8}$$

1.4. “Leyes” de los signos para la multiplicación

Cuando multiplicamos dos números reales seguimos la siguiente “regla” para obtener el signo del resultado

- $(+a) \cdot (+b) = +ab$
- $(-a) \cdot (+b) = -ab$
- $(+a) \cdot (-b) = -ab$
- $(-a) \cdot (+b) = -ab$

La forma sencilla de recordarlo es “Multiplicar signos iguales da positivo y multiplicar signos contrarios da negativo”. También aplica para la división.

- $(+a)/(+b) = +(a/b)$
- $(-a)/(+b) = -(a/b)$
- $(+a)/(-b) = -(a/b)$
- $(-a)/(+b) = +(a/b)$

Es importante recalcar que si aplica para divisiones, también aplica para las fracciones

- $\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}$
- $\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$
- $\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$
- $\frac{-a}{+b} = +\frac{a}{b}$

1.5. Sumar y restar números con signo

Se puede resumir en la frase “Signos iguales se *suman* y signos contrarios se *restan* conservándose el signo de mayor valor”. Veamos ejemplos de sumas (la operación de la adición) con números con signos, con ejemplos numéricos para que quede completamente claro

- $(+5) + (+2) = +7$
- $(-5) + (+2) = -3$
- $(+5) + (-2) = +3$

- $(-5) + (-2) = -7$

Y ahora veamos ejemplos de restas (la operación inversa a la adición, la sustracción), recordando que $a - b = a + (-b)$

- $(+5) - (+2) = (+5) + (-2) = +3$
- $(-5) - (+2) = (-5) + (-2) = -7$
- $(+5) - (-2) = (+5) + (+2) = +7$
- $(-5) - (-2) = (-5) + (+2) = -3$

2. ¿Qué significa resolver una ecuación?

Las ecuaciones son dos expresiones algebraicas que la uno una igualdad, es decir que son iguales entre si, y que además tiene una incógnita usualmente representada por una literal, es decir algo como por ejemplo:

$$\frac{2x-3}{5}+3=10$$

Resolver la ecuación significa encontrar uno o más valores para la variable de modo que sea cierta la igualdad.

Por ejemplo $x=2$ no resuelve la ecuación anterior ya que

$$\frac{2x-3}{5}+3=\frac{2\cdot 2-3}{5}+3=\frac{4-3}{5}+3=\frac{1}{5}+3=0.2+3=3.2 \ \times$$

y claramente 3.2 no es igual a 10 por lo que $\frac{2x-3}{5}+3$ si $x=2$ no toma el valor de 10.

Por ejemplo $x=9$ tampoco resuelve la ecuación puesto que

$$\frac{2x-3}{5}+3=\frac{2\cdot 9-3}{5}+3=\frac{18-3}{5}+3=\frac{15}{5}+3=5+3=8 \ \times$$

y claramente 8 no es igual a 10 por lo que $\frac{2x-3}{5}+3$ si $x=9$ no toma el valor de 10.

Por ejemplo $x=34$ tampoco resuelve la ecuación puesto que

$$\frac{2x-3}{5}+3=\frac{2\cdot 34-3}{5}+3=\frac{68-3}{5}+3=\frac{65}{5}+3=13+3=16 \ \times$$

y claramente 16 no es igual a 10 por lo que $\frac{2x-3}{5}+3$ si $x=34$ no toma el valor de 10.

Pero el número $x=19$ si es la solución a la ecuación ya que

$$\frac{2x-3}{5}+3=\frac{2\cdot 19-3}{5}+3=\frac{38-3}{5}+3=\frac{35}{5}+3=7+3=10 \ \checkmark$$

así que si es cierto para $x=19$ que

$$\frac{2x-3}{5}+3=10.$$

Denotamos: la solución a la ecuación $\frac{2x-3}{5}+3$ es $x=19$.

3. Ejemplos de despejes

En la siguiente tabla se ven el ejemplos de despejes de las cuatro operaciones.

Suma:	**Resta:**	**Multiplicación:**	**División:**
$x+3=15$	$x-3=15$	$x\cdot 3=15$	$\frac{x}{3}=15$
$(x+3)-3=15-3$	$(x-3)+3=15+3$	$\frac{x\cdot 3}{3}=\frac{15}{3}$	$\frac{x}{3}\cdot 3=15\cdot 3$
$x+(3-3)=15-3$	$x+(-3+3)=15+3$	$x\cdot\frac{3}{3}=\frac{15}{3}$	$\frac{3x}{3}=15\cdot 3$
$x+(0)=15-3$	$x+(0)=15+3$	$x\cdot 1=\frac{15}{3}$	$x\cdot\frac{3}{3}=15\cdot 3$
$x=15-3$	$x=15+3$	$x=\frac{15}{3}$	$x\cdot 1=15\cdot 3$
$x=12$	$x=18$	$x=5$	$x=45$

Para despejes de ecuaciones que tienen mas términos con varias multiplicaciones ordenadas se sigue el mismo procedimiento, es decir “ identificamos que se quiere eliminar y hacemos la operación contraria ". Veamos un ejemplo:

$$\frac{2x-3}{5}+3=10$$

$$\frac{2x-3}{5}+3=10 \qquad \text{identificamos la literal que queremos despejar}$$

$$\frac{2x-3}{5}+3=10 \qquad \text{identificamos el primer termino a despejar}$$

$$\left(\frac{2x-3}{5}+3\right)-3=(20)-3 \qquad \text{aplicamos la operación inversa}$$

$$\frac{2x-3}{5}+(3-3)=10-3 \qquad \text{operamos...}$$

$$\frac{2x-3}{5}+0=7$$

$$\frac{2x-3}{5}=7 \qquad \text{y repetimos}$$

$$\left(\frac{2x-3}{5}\right)\cdot 5=(7)\cdot 5$$

$$\frac{(2x-3)\cdot 5}{5}=7\cdot 5$$

$$(2x-3)\cdot\frac{5}{5}=35$$

$$(2x-3)\cdot 1=35$$

$$2x-3=35 \qquad \text{y repetimos}$$

$$(2x-3)+3=(35)+3$$

$$2x+(-3+3)=35+3$$

$$2x+0=38$$

$$2x=38 \qquad \text{y repetimos}$$

$$\frac{2x}{2}=\frac{38}{2}$$

$$x\cdot\frac{2}{2}=19$$

$$x\cdot 1=19$$

$$x=19$$

Para empezar a resolver ecuaciones lineales te recomendamos que hagas todos los pasos sin omitir ninguno ya que del contrario podemos creer que estamos haciendo algo correcto pero no es asi, por ejemplo:

$$\frac{2x-3}{5} = 7$$
$$\frac{2x-3}{5} = 7$$
$$\frac{2x-3+3}{5} = 7+3$$
$$\frac{2x}{5} = 10$$

Lo cual es falso, es por ello que para empezar te acostumbres a usar los paréntesis ya que eso nos indica a que le estamos efectuando la operación.

Con mas practica podrás omitir "Pasos obvios" y hacer que el ejercicio $\frac{2x-3}{5} + 3 = 10$ visto en la pagina anterior sea mas corto del siguiente modo:

$\frac{2x-3}{5}+3 = 20$	identificamos el primer termino a despejar
$\frac{2x-3}{5} = 20-3$	aplicamos la operación inversa
$\frac{2x-3}{5} = 17$	y repetimos
$(2x-3) = 17 \cdot 5$	
$2x-3 = 35$	y repetimos
$2x = 35+3$	
$2x = 38$	y repetimos
$x = \frac{38}{2}$	
$x = 19$	

Nota:
Muchas veces para hacer despejes te encontraras cosa como $2x + 5x$, y por la propiedad de *distributividad* se realiza del sigueinte modo

$$2x + 5x = x(2+5) = x(7) = 7x$$

Es decir cuando sumamos terminos que contienen la misma literal solo se suman sus coeficientes, de igual forma es valido para la resta

$$2x - 5x = x(2-5) = x(-3) = -3x$$

y

$$5x - 2x = x(5-2) = x(3) = 3x$$

4. Ejercicios

4.1. Despejes paso a paso

Para empezar los siguientes ejercicios se te pide que los realices paso a paso sin omitir ninguno.

Ejercicio 4.1.1. $5x + 4 = 1 - x$.

Ejercicio 4.1.2. $x - 5 = 6$.

Ejercicio 4.1.3. $5x - 13x = 6 - 10$.

Ejercicio 4.1.4. $2x + 1 = x + 4$.

Ejercicio 4.1.5. $3 - x = 3(x + 5)$.

4.2. Más despejes

Como ya tienes practica aplicando las propiedades, puedes continuar omitiendo “Pasos obvios”.

Ejercicio 4.2.1. $2x - 5 + 3x + 1 = 3x - 2$.

Ejercicio 4.2.2. $x + 7 = 12x - 3 - 8x + 1$.

Ejercicio 4.2.3. $6x - 1 + x = 4 - 5x + 3$.

Ejercicio 4.2.4. $x + 2x + 3x - 5 = 4x - 9$.

4.3. Soluciones a: Despejes paso a paso

Para estos ejercicios con la finalidad de comprender y familiarizarse los pasos necesarios para despejar adecuadamente, las soluciones vendrán desarrolladas con todos los pasos.

Ejercicio 4.3.1. $5x + 4 = 1 - x$.
Solución:$x = -1/2$
Pasos:

$$\begin{aligned}
5x + 4 &= 1 - x \\
5x + 4 + x &= (1 - x) + x \\
5x + 4 + x &= 1 + (-x + x) \\
(5x + 4) + x &= 1 + 0 \\
(5x + x) + 4 &= 1 \\
(5x + 1x) + 4 &= 1 \\
((5 + 1)x) + 4 &= 1 \\
6x + 4 &= 1 \\
(6x + 4) - 4 &= 1 - 4 \\
6x + (4 - 4) &= 1 - 4 \\
6x + 0 &= -3 \\
6x &= -3 \\
\frac{6x}{6} &= \frac{-3}{6} \\
\frac{6}{6} \cdot x &= \frac{-3}{6} \\
1 \cdot x &= \frac{-3}{6} \\
x &= \frac{-3}{6} \\
x &= -\frac{3}{6} \\
x &= -\frac{3}{3 \cdot 2} \\
x &= -\left(\frac{3}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) \\
x &= -\left(1 \cdot \frac{1}{2}\right) \\
x &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.3.2. $x - 5 = 6$.
Solución:$x = 11$

Pasos:

$$\begin{aligned}
x - 5 &= 6 \\
(x-5) + {\color{blue}+5} &= 6{\color{blue}+5} \\
x + (-5 + {\color{blue}+5}) &= 6{\color{blue}+5} \\
x + 0 &= 6{\color{blue}+5} \\
x &= 6{\color{blue}+5} \\
x &= 11
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.3.3. $5x - 13x = 6 - 10$.
Solución:$x = 1/2$
Pasos:

$$\begin{aligned}
5x - 13x &= 6 - 10 \\
(5-13)x &= 6 - 10 \\
-8x &= 6 - 10 \\
-8x &= -4 \\
\frac{-8x}{\color{blue}-8} &= \frac{-4}{\color{blue}-8} \\
\frac{-8}{\color{blue}-8} \cdot x &= \frac{-4}{\color{blue}-8} \\
1 \cdot x &= \frac{-4}{\color{blue}-8} \\
x &= \frac{-4}{\color{blue}-8} \\
x &= +\frac{4}{\color{blue}8} \\
x &= \frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 2} \\
x &= \frac{4}{4} \cdot \frac{1}{2} \\
x &= 1 \cdot \frac{1}{2} \\
x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.3.4. $2x + 1 = x + 4$.
Solución:$x = 3$

Pasos:

$$
\begin{aligned}
2x+1 &= x+4\\
(2x+1){\color{blue}-x} &= (x+4){\color{blue}-x}\\
(2x{\color{blue}-x})+1 &= (x+4){\color{blue}-x}\\
(2x{\color{blue}-x})+1 &= (x{\color{blue}-x})+4\\
(2x{\color{blue}-1x})+1 &= (x{\color{blue}-x})+4\\
(2x{\color{blue}-1x})+1 &= 0+4\\
(2{\color{blue}-1})x+1 &= +4\\
(2{\color{blue}-1})x+1 &= 4\\
1x+1 &= 4\\
(1x+1){\color{blue}-1} &= 4{\color{blue}-1}\\
(1x+1){\color{blue}-1} &= 3\\
1x+(1{\color{blue}-1}) &= 3\\
1x+0 &= 3\\
1x &= 3\\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4.3.5. $3 - x = 3(x+5)$.
Solución:$x = -3$
Pasos:

$$\begin{aligned}
3 - x &= 3(x+5) \\
3 - x &= 3x + 3 \cdot 5 \\
3 - x &= 3x + 15 \\
(3 - x) + 1x &= (3x + 15) + 1x \\
3 + (-x + 1x) &= (3x + 15) + 1x \\
3 + (-1x + 1x) &= (3x + 1x) + 15 \\
3 + (-1 + 1)x &= (3 + 1)x + 15 \\
3 + (0)x &= (4)x + 15 \\
3 &= 4x + 15 \\
3 - 15 &= (4x + 15) - 15 \\
3 - 15 &= 4x + (15 - 15) \\
12 &= 4x + 0 \\
-12 &= 4x \\
\frac{-12}{4} &= \frac{4x}{4} \\
-\frac{12}{4} &= \frac{4}{4} \cdot x \\
-\frac{3 \cdot 4}{4} &= 1 \cdot x \\
-\left(3 \cdot \frac{4}{4}\right) &= x \\
-(3 \cdot 1) &= x \\
-3 &= x \\
x &= -3
\end{aligned}$$

4.4. Soluciones a: Más despejes

Ejercicio 4.4.1. $2x - 5 + 3x + 1 = 3x - 2$.
Solución: $x = 1$

Ejercicio 4.4.2. $x + 7 = 12x - 3 - 8x + 1$.
Solución: $x = 3$

Ejercicio 4.4.3. $6x - 1 + x = 4 - 5x + 3$.
Solución: $x = 2/3$

Ejercicio 4.4.4. $x + 2x + 3x - 5 = 4x - 9$.
Solución: $x = -2$

5. No existe la solución y la solución es cualquier número

Cuando resolvemos una ecuación en algunas ecuaciones llegamos a algo del estilo $a = a$ o $a = b$, con a y b números diferentes, en estos casos (si todos los pasos que hicimos fueron correctos) diremos que cualquier numero cumple la ecuación o que no existe ningún número que cumpla la ecuación. Para empezar veamos la ecuación $2x + 8 - 3 = 3x + 5 - x$, la cual resolveremos brevemente a continuación

$$\begin{aligned}
2x + 8 - 3 &= 3x + 5 - x \\
2x + 8 - 3 &= 2x + 5 \\
+8 - 3 &= 2x - 2x + 5 \\
8 - 3 &= 0 + 5 \\
5 &= 5
\end{aligned}$$

Como llegamos a $5 = 5$ lo cual siempre es cierto, concluimos que la ecuación siempre es cierta, así que cualquier valor de x cumple la ecuación, recordando lo visto en la **sección 2 "¿Qué significa resolver una ecuación?"**, esto quiere decir que si sustituyes el número que quieras, el que sea, se cumplirá que ambos lados de la ecuación son iguales, te invitamos a probar con el número que deseas para que compruebes su veracidad, aquí probaremos para $x = 2022$ porque si.
Si sustituimos $x = 2022$ del lado izquierdo obtenemos

$$2x + 8 - 3 = 2 \cdot 2022 + 8 - 3 = 4044 + 5 = 4049$$

y si sustituimos $x = 2022$ del lado derecho obtenemos

$$3x + 5 - x = 3 \cdot 2022 + 5 - 2022 = 6066 + 5 - 2022 = 6071 - 2022 = 4049$$

Como dan el mismo resultado, concluimos que el número 2020 es solución de la ecuación.

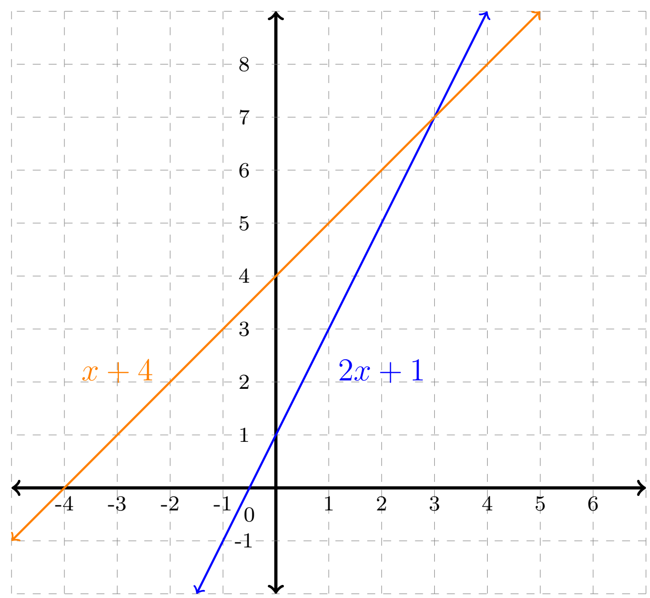
Ahora es el momento de ver un ejemplo de una ecuación que no tendrá solución, resolveremos la ecuación $2x + 15 - 3 = 3x + 5 - x$,

$$\begin{aligned}
2x + 15 - 3 &= 3x + 5 - x \\
2x + 15 - 3 &= 2x + 5 \\
+15 - 3 &= 2x - 2x + 5 \\
15 - 3 &= 0 + 5 \\
12 &= 5
\end{aligned}$$

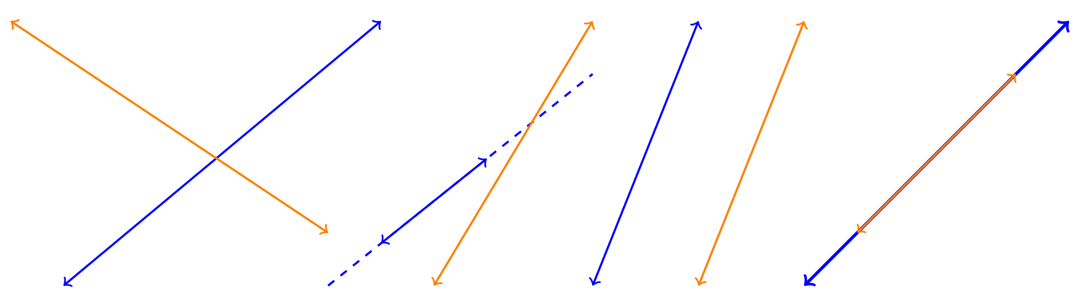
Como llegamos a $12 = 5$ lo cual siempre es falso, concluimos que la ecuación siempre es falsa, así que ningún valor de x cumple la ecuación. Lo que significa ningún número cumple que al substituirlo en la ecuación da el mismo resultado de ambos lados, osea lo cumple.

5.1. Idea intuitiva

Para ver una idea intuitiva de porque sucede que en ocasiones tenemos una solución, o aveces todos los números son solución u otras veces no tenemos solución daremos por hecho que toda expresión lineal se puede expresar como una recta en el plano.
Antes de ver ejemplos de ecuaciones en las que no hay solución o todos lo números son soluciones veamos un ejemplo "normal", veamos la ecuación $2x+1 = x+4$, si las representamos de manera grafica a $x + 4$ de color naranja y $2x + 1$ de color azul podemos ver que se cortan en un punto, este punto tiene coordenadas $(3, 7)$ es decir el valor de x es 3, el cual es el valor de la solución de la ecuación (sabemos que esa es la solución ya que es uno de los ejercicios que se dejo anteriormente)



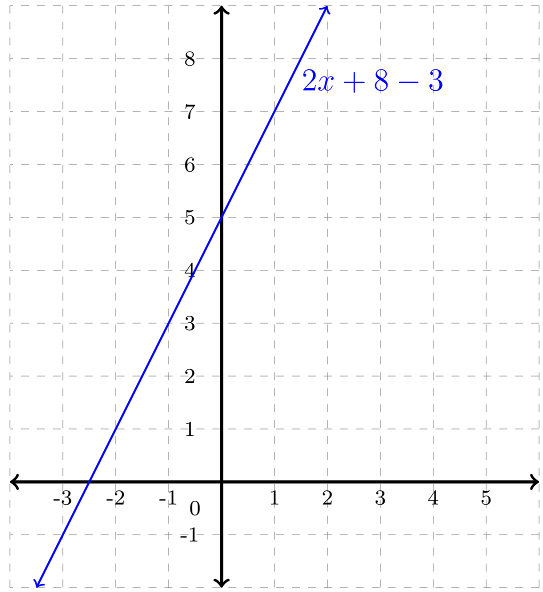
Resolver una ecuación quiere decir de manera gráfica encontrar el punto en el que dos lineas rectas se cortan, ahora piensa, si tienes dos rectas (infinitas) ¿que puede suceder, en cuantos puntos se pueden cortar?¿siempre se cortan?



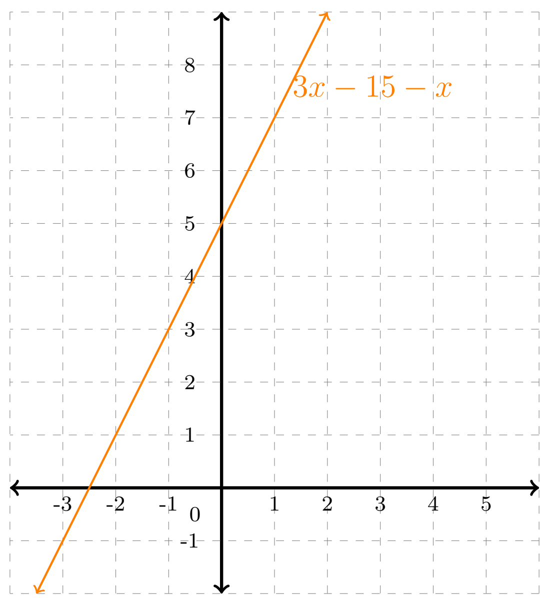
Como vemos puede pasar que se corten en un punto, o que sean paralelas y nunca se corten o que una este "encima" de la otra. Si se cortan en un punto ocurre la situación "normal" que es que se tenga una única solución, si no se cortan (en el caso de que sean paralelas) pues no tendremos soluciones, y cuando una esta "encima" de la otra quiere decir que en realidad son

la misma recta, por lo que se cortan en todos sus puntos, por lo que todos los números serán soluciones de la ecuación.
Es claro que una recta no se puede cortar en exactamente dos puntos, o tres o cuatro o cualquier número, por lo que no es posible que tengamos exactamente soluciones o 3 o 4 o etc, por lo que los únicos casos posibles son los tres que ya mencionamos previamente.

Por ejemplo la expresión $2x + 8 - 3$ donde $2x + 8 - 3$ indica la altura y x la posición vertical



Y veamos también la recta que representa la ecuación $3x - 15 - x$



Como puedes apreciar en las graficas, ambas ecuaciones representan la misma recta, por lo que todos sus puntos son soluciones a la ecuacion

5.2. Ejercicios

Ejercicio 5.2.1. $5x + 4 - 6x = 7 - x - 3$.

Ejercicio 5.2.2. $4x + 2 + 7x = 10x + 3 + x$.

5.3. Soluciones

Ejercicio 5.3.1. $x \in \mathbb{R}$

Ejercicio 5.3.2. no existe x