Puntos y rectas importantes del triángulo (17/julio/2019)

- **Mediana:** Un segmento que va desde uno de los vértices del triángulo hacia el punto medio del lado opuesto.
  - Concurren en el **gravicentro** denotado por **G**.
- **Bisectriz:** Una recta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales. Una recta que parte de un vértice y que en cada punto equidista hacia dos líneas que se intersecan en dicho vértice.
  - Concurren en el **incentro** denotado por **I**.
- **Mediatriz:** Una recta perpendicular a uno de los lados por su punto medio. Lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento.
  - Concurren en el **circuncentro** denotado por **O**.
- **Altura:** Un segmento que va desde un vértice y es perpendicular a su lado opuesto o a la prolongación del mismo.
  - Concurren en el **ortocentro** denotado por **H**.

Ejercicios

1. Demuestra que las medianas concurren. (Hint: ve en qué proporción se cortan dos medianas).
2. Demuestra que las bisectrices concurren. (Hint: usa la definición de una bisectriz).
3. Demuestra que las mediatrices concurren. (Hint: usa la definición de una mediatriz).
4. Demuestra que las alturas concurren. (Hint: traza rectas paralelas a los lados por sus vértices opuestos).

Problemas

1. Demuestra que en un triángulo rectángulo, el circuncentro es el punto medio de la hipotenusa.
2. Demuestra que las medianas dividen al triángulo en seis triángulos más pequeños de áreas iguales.
3. Sea H el ortocentro de un triángulo ABC. Demuestra que $\angle BHC = 180° - \angle BAC$
4. Sea G el gravicentro del triángulo ABC, y sean M, N, P los gravicentros de los triángulos BGC, CGA, AGB, respectivamente. Demuestra que $\Delta MNP \approx \Delta ABC$.
5. Demuestra que la bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo divide por la mitad el ángulo entre la mediana y la altura bajadas sobre la hipotenusa.
6. Sea I el incentro de un triángulo ABC. Sea $\angle BAC = \alpha$. Demuestra que
$$\angle BIC = 90° + \frac{\alpha}{2}$$
7. Se da una circunferencia y un punto A fuera de ésta. AB y AC son tangentes a la circunferencia (B y C son los puntos de tangencia). Demuestra que el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC se halla en la circunferencia dada.

8. Sea AD la altura del triángulo ABC, H el ortocentro. Demuestra que $BD \cdot DC = AD \cdot DH$.
9. Demuestra que el producto de las partes en las cuales el ortocentro divide a una altura, es el mismo para las tres alturas.
10. Demuestra que el ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro de su triángulo órtico. Nota: El triángulo órtico es aquel cuyos vértices son los pies de las alturas del triángulo original.
11. (**Línea de Simson**) Sean A', B', C' las proyecciones de un punto sobre los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC, respectivamente. Demuestra que los puntos A', B', C' son colineales si y sólo si el punto P se encuentra sobre el circuncírculo del triángulo. A la recta que pasa por A', B', C' se le conoce como línea de Simson (de P).
12. (**Línea de Euler**) Demuestra que H, G, O son colineales.