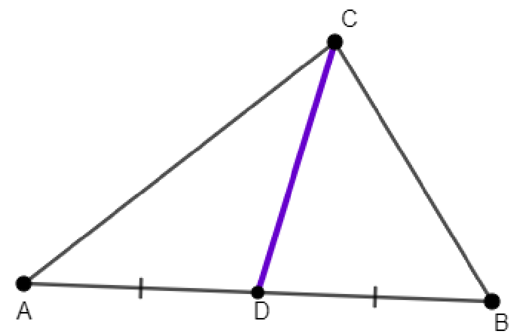
PUNTOS Y RECTAS DEL TRIÁNGULO

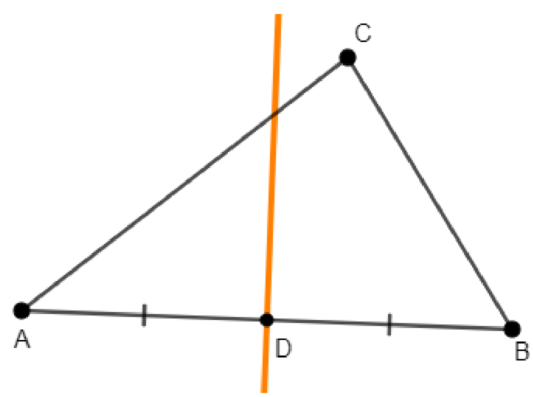
Daniel Tzoali Arroyo Valdivia

1. Rectas del triángulo

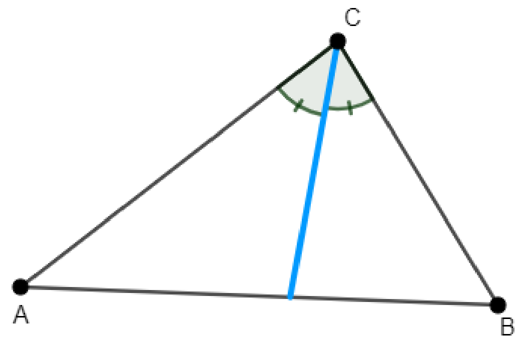
Mediana: Es el segmento que va de un vértice al punto medio del lado opuesto.



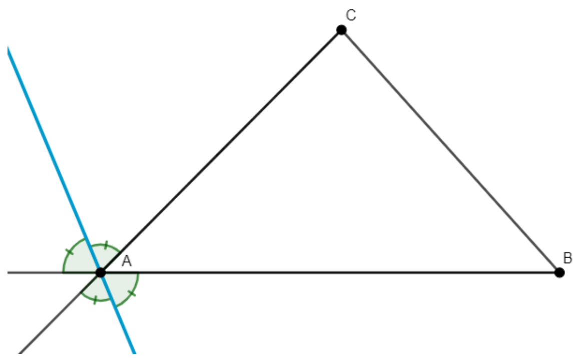
Mediatriz: La mediatriz de un segmento AB es la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio. Tiene la propiedad de que cada punto en ella se encuentra a la misma distancia de A y B.



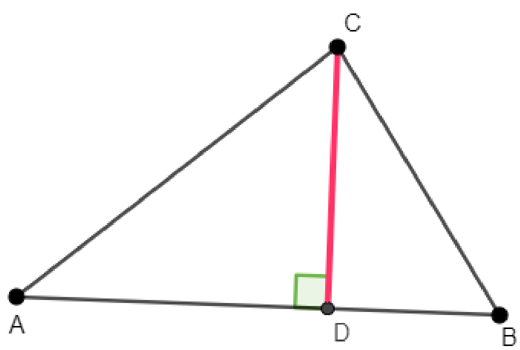
Bisectriz Interna: La bisectriz interna del ángulo $\angle CAB$ del triángulo ABC es la recta por A que divide al ángulo en dos ángulos iguales. Tiene la propiedad de que cada punto de ella equidista de los lados que conforman el ángulo.



Bisectriz Externa: La bisectriz externa del ángulo $\angle CAB$ es la recta por A que divide al ángulo suplementario en dos ángulos iguales. También tiene la propiedad de que cada punto de ella equidista de los lados que conforman el ángulo. Es fácil ver que la bisectriz externa parte a la mitad a los dos ángulos suplementarios.



Altura: La altura desde el vértice C es la perpendicular al lado opuesto AB que pasa por C.



Ejercicios:

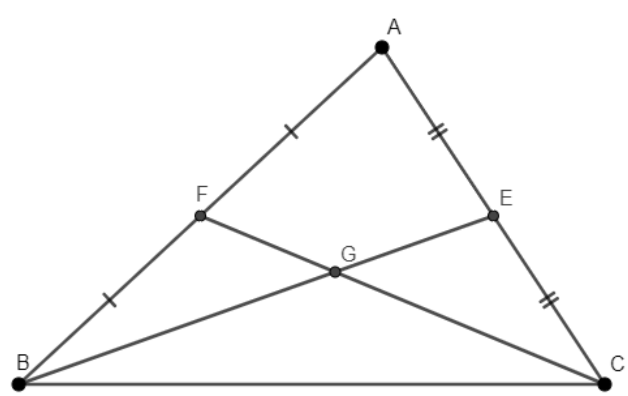
Intenta estos ejercicios antes de avanzar en el material.

- Demuestra que las 3 medianas de un triángulo concurren en un punto y se cortan en una razón de $2:1$.
- Demuestra que cada punto dentro de la mediatriz de AB se encuentra a la misma distancia de A y B.
- Demuestra que las 3 mediatrices de un triángulo concurren en un punto.
- Demuestra que la bisectriz interna y externa de un ángulo, son perpendiculares.
- Demuestra que cualquier punto dentro de la bisectriz interna de $\angle CAB$ equidista de los lados AC y AB.
- Demuestra que cualquier punto dentro de la bisectriz externa de $\angle CAB$ equidista de los lados AC y AB.
- Demuestra que las 3 bisectrices de un triángulo concurren en un punto.
- Demuestra que las 3 alturas de un triángulo concurren en un punto.

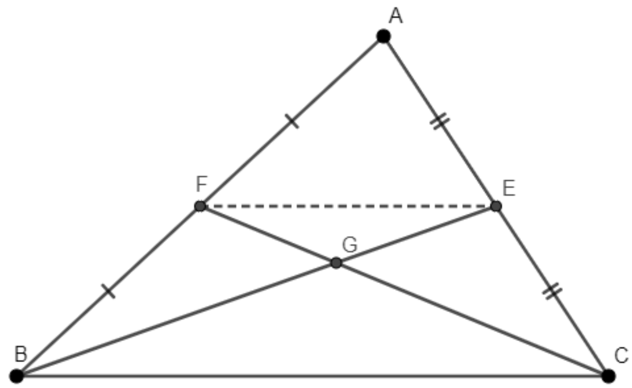
2. Gravicentro

El **gravicentro, baricentro, centroide o centro de gravedad** es el punto de intersección de las 3 medianas de un triángulo.

Falta demostrar que las 3 medianas concurren en un punto, así que ahí va. Primero hay que ver que pasa con sólo 2 medianas. Sean E y F los puntos medios de AC y AB, respectivamente. Sea G el punto de intersección de las medianas BE y CF.



Ahora, se puede ver que los puntos E y F están partiendo a los lados AB y AC, respectivamente, en la misma proporción (porque son el punto medio). Así que por Tales, el segmento EF es paralelo al lado BC.



Con lo anterior podemos ver algunos ángulos iguales, los importantes por el momento son $\angle CBA = \angle EFA$ y $\angle ACB = \angle AEF$. Así que $\triangle ABC \sim \triangle AFE$ y $\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2} \rightarrow BC = 2EF$.

Otros ángulos iguales que podemos ver son $\angle EBC = \angle FEB$ y $\angle FCB = \angle CFE$, por el criterio AA, $\triangle BGC \sim \triangle EGF$, así que $\frac{FG}{GC} = \frac{EG}{GB} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{2} \rightarrow GC = 2FG$ y $GB = 2EG$. Con esto podemos ver que el punto G parte a las medianas BE y CF en razón $2:1$.

Ahora, si repetimos el proceso con las medianas BE y AD llegaríamos al mismo resultado, que un punto G' parte a las medianas BE y AD en razón $2:1$. Pero solo existe un punto dentro de BE que lo parte en razón $2:1$, así que $G = G'$, entonces las tres medianas se cortan en el mismo punto, que es el gravicentro (por lo general se denota por G).

Ejercicio

- En un triángulo ABC, la longitud del segmento de la mediana desde el vértice A tiene longitud

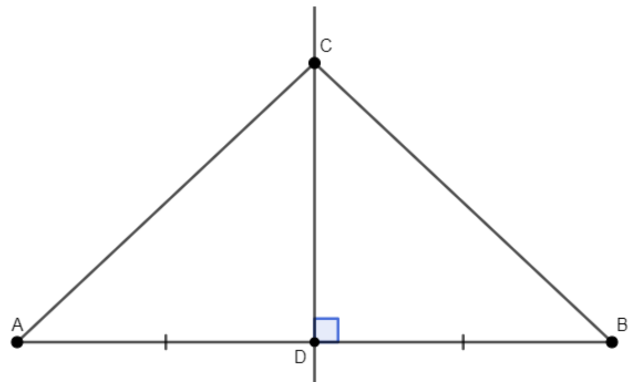
$$\frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}$$

3. Circuncentro

El **circuncentro** es el punto de concurrencia de las 3 mediatrices de un triángulo.

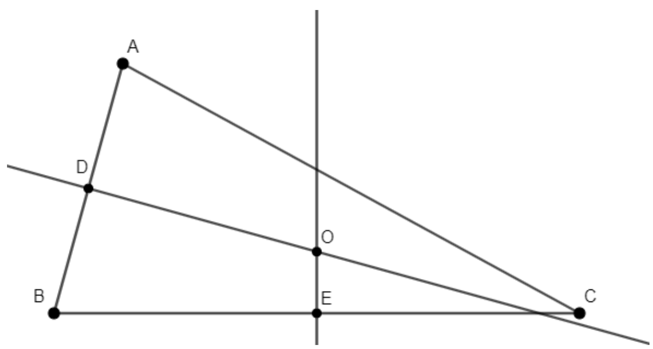
Hay que ver la demostración de que las mediatrices concurren en un punto, pero antes de eso hay que probar que cualquier punto que se encuentre en la mediatriz de AB equidista de A y B.

Tomando un punto C que se encuentre dentro de la mediatriz de AB.

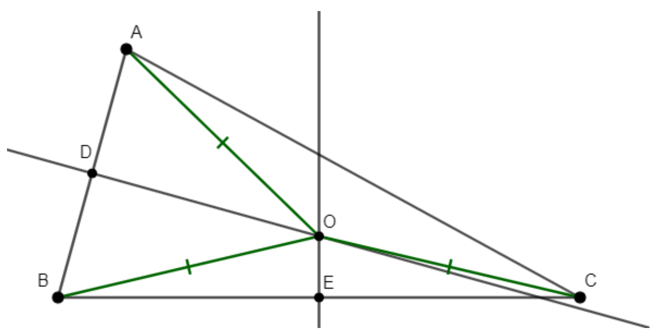


Por la definición de la mediatriz tenemos que $\angle ADC = \angle BDC = 90°$ y que $\overline{AD} = \overline{DB}$, también podemos observar que los triángulos ADC y BDC comparten el lado DC. Por el criterio LAL, $\triangle ADC \cong \triangle BDC$, por lo tanto, $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Ahora trazando las mediatrices AB y BC de un triángulo ABC.

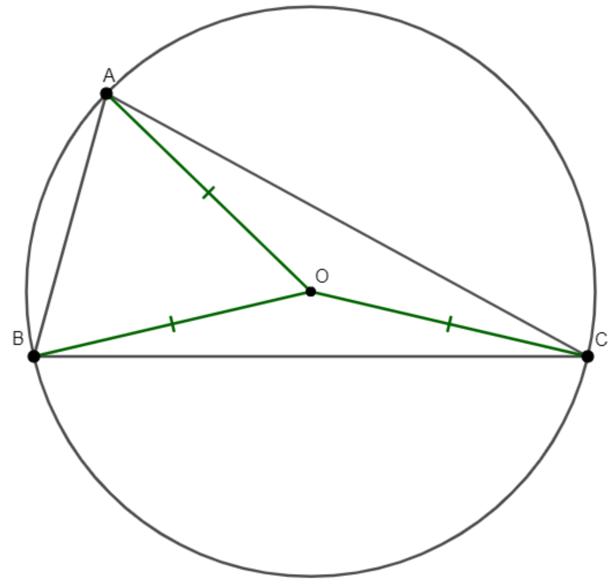


Si trazamos los segmentos AO, BO y CO, estos tendrán la misma longitud, por lo visto en la demostración anterior.



Como $\overline{AO} = \overline{CO}$ entonces O se encuentra contenido en la mediatriz de AC, así que las 3 mediatrices se intersectaran en el mismo punto, el circuncentro (por lo general se denota por O).

Ya vimos que el circuncentro se encuentra a la misma distancia de los vértices de un triángulo, ¿te suena a algo? Así es, el circuncentro es el centro de la circunferencia que pasa por los vértices de un triángulo.



A la circunferencia que pasa por los vértices de un triángulo se le llama **circuncírculo**.

La intersección de las mediatrices de un triángulo es el **circuncentro**, que también es el centro del circuncírculo.

La distancia del circuncentro a cualquier vértice del triángulo es llamada **circunradio**.

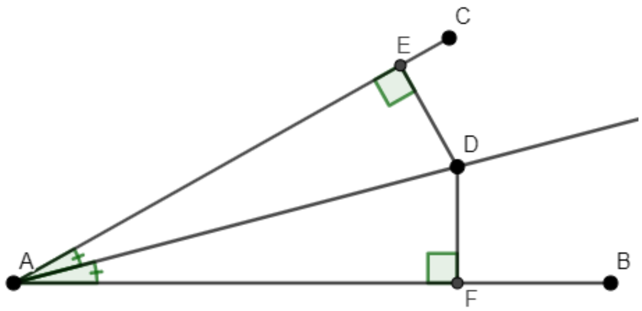
Con esto podemos ver que podemos trazar una circunferencia a través de los vértices de cualquier triángulo.

4. Incentro

El **incentro** es el punto de concurrencia de las bisectrices internas de un triángulo.

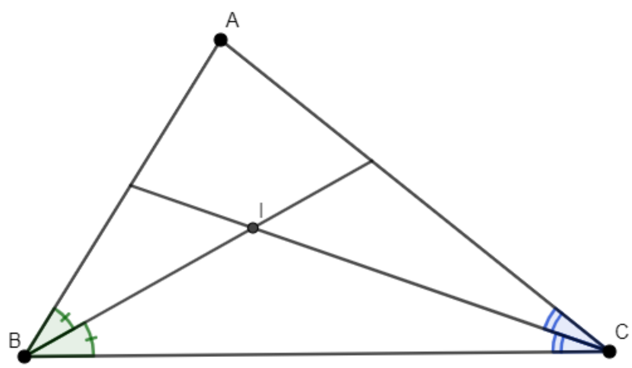
Antes de hacer la demostración del incentro hay que demostrar que cualquier punto dentro de la bisectriz de $\angle CAB$ equidista de los lados AC y AB.

Sea D un punto dentro de la bisectriz de $\angle CAB$ y sean E y F los pies de la altura desde D hacia AC y AB, respectivamente.

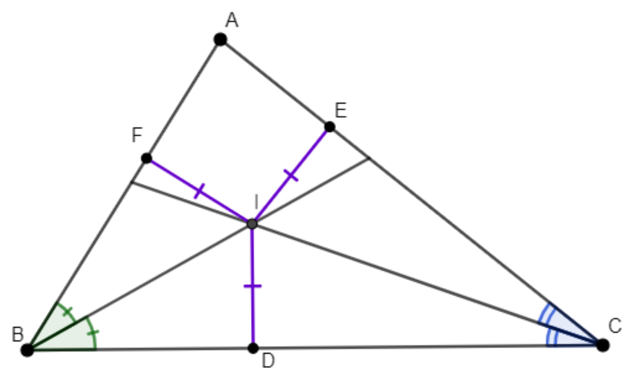


Por el criterio AA, $\triangle DAE \sim \triangle DAF$, pero como ambos triángulos comparten el lado AD, entonces los triángulos son congruentes. Por lo tanto, $\overline{ED} = \overline{DF}$.

Ahora, dentro del triángulo ABC trazaremos dos bisectrices. Sea I el punto de intersección de las dos bisectrices.



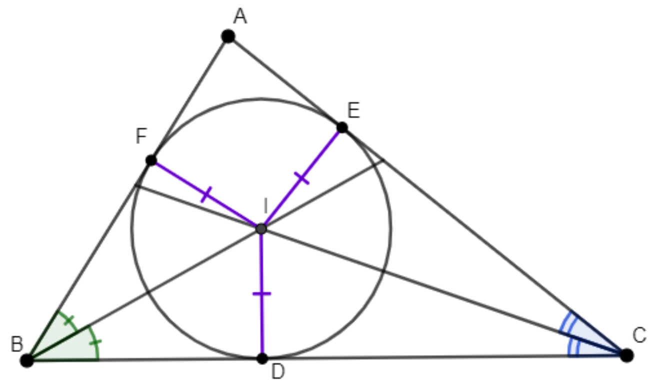
Sean D, E y F las pies de las alturas desde I hacia BC, AC y AB, respectivamente. Por la demostración anterior tenemos que $\overline{ID} = \overline{IE} = \overline{IF}$.



Como $\overline{IE} = \overline{IF}$, entonces I se encuentra sobre la bisectriz de $\angle CAB$. Así que las tres bisectrices se intersectan en el mismo punto, el incentro (por lo general denotado por I).

Recapitulando $\overline{ID} = \overline{IE} = \overline{IF}$, parece algo familiar, ¿no te parece?

El incentro de un triángulo es el centro de un círculo que pasa por los puntos D, E y F. Como los segmentos ID, IE e IF son perpendiculares a BC, AC y AB, respectivamente, entonces la circunferencia con centro en I será tangente a los lados del triángulo.



A la circunferencia que es tangente a los lados de un triángulo se le llama **incírculo**.

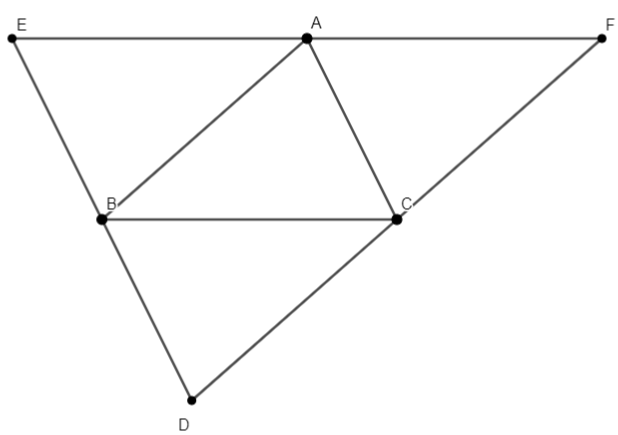
La intersección de las bisectrices de un triángulo es el **incentro**, que también es el centro del incírculo.

La distancia del incentro a cada lado triángulo es llamada **inradio**.

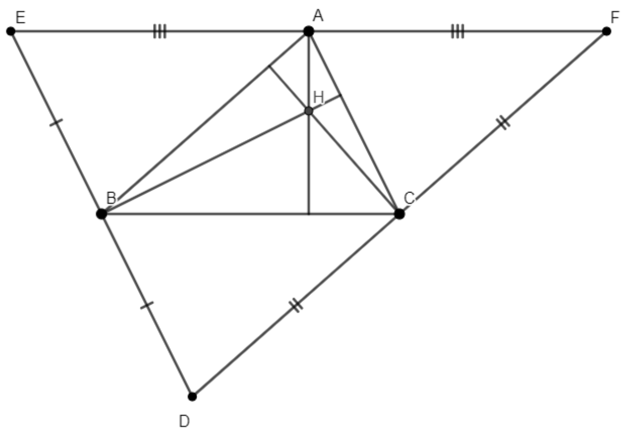
5. Ortocentro

El ortocentro es el punto de intersección de las alturas de un triángulo.

Para demostrar que las alturas de un triángulo ABC concurren trazaremos por cada vértice la paralela de su lado opuesto. Sean D, E y F puntos tales que $AB \parallel DF$, $BC \parallel EF$ y $AC \parallel ED$.



Observando el paralelogramo $EBCA$, podemos ver que $\overline{EB} = \overline{AC}$. Después observando el paralelogramo $BDCA$, se puede ver que $\overline{BD} = \overline{AC}$, por lo que B es el punto medio de ED. Realizando el mismo proceso para los otros paralelogramos concluiremos que las alturas del triángulo ABC son las mediatrices del triángulo DEF y por lo visto anteriormente, las mediatrices del triángulo DEF concurren en un punto, por lo tanto, las alturas del triángulo ABC concurren en el mismo punto, el ortocentro (por lo general denotado por H).



Ejercicios

- Sea ABC un triángulo con alturas AD, BE y CF, hay 6 cuadriláteros cíclicos ocultos. ¡Encuentralos!
- Demuestra que las alturas concurren usando el lema de la perpendicular

6. Datos de vital importancia

1. Arquímedes murió en el 212 a.C. cuando un soldado romano lo sorprendió estudiando figuras geométricas que había trazado en la arena. Arquímedes estaba demasiado concentrado para prestar atención a lo que le decía el soldado, que enfureció y lo atravesó con su espada. “No molestes a mis círculos” fueron las últimas palabras del matemático griego. https://elibro.net/es/ereader/uaa/127786?page=154

7. Problemas

1. Demuestra que en un triángulo rectángulo, el circuncentro es el punto medio de la hipotenusa.

2. Demuestra que las medianas dividen al triángulo en seis triángulos más pequeños de áreas iguales.
3. Demuestra que si en un triángulo dos medianas son iguales, entonces el triángulo es isósceles.
4. Sea H el ortocentro de un triángulo ABC. Demuestra que $\angle BHC = 180° - \angle BAC$.
5. Sea I el incentro de un triángulo ABC. Sea $\angle BAC = \alpha$. Demuestra que $\angle BIC = 90° + \frac{\alpha}{2}$.
6. Sea G el gravicentro del triángulo ABC, y sean M, N, P los gravicentros de los triángulos BGC, CGA, AGB, respectivamente. Demuestre que $\triangle MNP \sim \triangle ABC$.
7. (Lema H2O) Sea ABC un triángulo con circuncentro O y ortocentro H, y sea M el punto medio de BC. Entonces $AH = 2OM$.
8. Demuestra que los trapecios isósceles son los únicos trapecios cíclicos.
9. (Teorema de Miquel) Sea ABC un triángulo, sean D, E y F puntos arbitrarios sobre los lados BC, AC y AB. Demuestra que los circuncírculos de los triángulos AEF, BDF y CDE concurren en un punto.
10. Sea ABC un triángulo acutángulo tal que $\angle BAC = 60°$. Sean O el circuncentro, I el incentro y H el ortocentro del triángulo ABC. Demuestra que los puntos B, H, I, O y C son concíclicos.
11. Se da una circunferencia y un punto A fuera de ésta. AB y AC son tangentes a la circunferencia. Demuestra que el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC se halla en la circunferencia dada.
12. Sea AD la altura del triángulo ABC, H el ortocentro. Demuestra que $BD * DC = AD * DH$.
13. El cuadrilátero $ABCD$ está circunscrito a una circunferencia con centro O. Demuestra que $\angle AOB + \angle COD = 180°$.
14. (ORO 2019) Sean ABC un triángulo, M el punto medio de AB y L el punto medio de BC. Denotamos por G a la intersección de AL con CM y tomamos E un punto tal que G es el punto medio del segmento AE. Demuestra que el cuadrilátero $MCEB$ es cíclico si y solamente si $MB = BG$.
15. Sean AD, BE y CF las alturas de un triángulo acutángulo ABC y sea H su ortocentro. Sea N el punto medio de AH y sea M el punto medio de BC. Demuestra que NM es perpendicular a FE.
16. En un triángulo ABC, sean E y D puntos sobre los lados AB y AC, respectivamente. BF bisecta al $\angle ABD$, y CF bisecta $\angle ACE$. Demuestra que $\angle BEC + \angle BDC = 2\angle BFC$.
17. Demuestra que el ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro de su triángulo órtico. Nota: El triángulo órtico es aquel cuyos vértices son los pies de las alturas del triángulo original.

18. (Línea de Simson) Sean D, E, F las proyecciones desde un punto P hacia los lados BC, AC, AB de un triángulo ABC, respectivamente. Demuestra que los puntos D, E, F son colineales si y sólo si el punto P se encuentra sobre el circuncírculo del triángulo.
19. (Línea de Euler) Demuestra que H, G, O son colineales.
20. (OMM 2015) Sea ABC un triángulo y sea H su ortocentro. Sea PQ un segmento que pasa por H con P en AB, Q en AC y tal que $\angle PHB = \angle CHQ$. Finalmente en el circuncírculo del triángulo ABC considera M el punto medio del arco BC que no contiene a A. Muestra que $MP = MQ$.