Problemas básicos de razonamiento matemático

Porfirio Toledo Hernández
Brenda Tapia Santos
Francisco Gabriel Hernández Zamora

VERACRUZ GOBIERNO DEL ESTADO
SEV Secretaría de Educación
SEB Subsecretaría de Educación Básica
CIVE Consejo Interinstitucional Veracruzano de Educación
Matemáticas para todos
Universidad Veracruzana

Cuitláhuac García Jiménez
Gobernador del Estado de Veracruz

Zenyazen R. Escobar García
Secretario de Educación de Veracruz

Maritza Ramírez Aguilar
Subsecretaria de Educación Básica

Ernesto Efrén Del Moral Ventura
Secretario Técnico del Consejo Interinstitucional Veracruzano de Educación

Félix Guillermo López Rivera
Coordinador Académico de Educación Básica

Nanyelly Teresa Zaldívar Sobrevilla
Directora General de Educación Primaria Estatal

Ana Laura García Calvillo
Directora General de Educación Primaria Federalizada

Marcelo Tepole Ramírez
Director de Educación Indígena

José Luis Guzmán Ríos
Director General de Educación Secundaria

Daffni Danae Rojas Cortés
Coordinadora para la Difusión y Optimización de los Servicios Educativos

Teresita de Jesús Vera Ordóñez
Coordinadora del Programa Matemáticas para Todos

Porfirio Toledo Hernández
Brenda Tapia Santos
Francisco Gabriel Hernández Zamora
Autores

Porfirio Toledo Hernández
Coordinador de obra

Michelle Montano Hernández
Isamar Flores Montiel
Jesús Alfonso Segura Landa
Jessica Miranda Jiménez
Matsa Yolanda Gutiérrez Hernández
Miguel Ángel Flores Mendoza
Neftalí de Jesús García Hernández
Diseño e ilustración

Departamento de Apoyo Editorial (DAE) de la CDOSE-SEV
Corrección de estilo

Problemas básicos de razonamiento matemático

km 4.5 carretera federal Xalapa–Veracruz, C.P. 91193, Xalapa, Veracruz, México
$1.^a$ edición, 2023
ISBN: 978-607-725-486-7

Índice general

Prólogo

El libro está dirigido a alumnos y profesores de los niveles primaria y secundaria, así como a cualquier interesado en acercarse a las matemáticas a través de la resolución de problemas, usando el razonamiento matemático. Los problemas que aquí se presentan formaron parte de diferentes etapas eliminatorias de los primeros cuatro años en los que Veracruz fue parte de la **Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica** (OMMEB).

La OMMEB considera la participación de estudiantes de educación básica, desde cuarto grado de primaria hasta segundo de secundaria, divididos en tres niveles: 1 (cuarto y quinto de primaria), 2 (sexto de primaria y primero de secundaria) y 3 (segundo de secundaria). Al ser un certamen con apenas seis ediciones, se tiene el reto de proporcionar a los interesados material adecuado para prepararse en este tipo de concursos y, además, ofrecer nuevas perspectivas de la enseñanza de las matemáticas, con lo que se promueve un intercambio de experiencias.

El libro consta de cinco capítulos y cada uno contiene problemas de un tema específico (pero no exclusivo), a su vez, se divide en secciones para los tres niveles de participación en la OMMEB. Al inicio de cada capítulo o tema, se presenta una sección con los principales resultados, definiciones y conceptos necesarios para resolver o entender la solución de las preguntas que se presentan, al final del mismo se pueden encontrar las soluciones a los ejercicios.

Con la finalidad de identificar los problemas se les ha asignado una notación como la siguiente: **4.^{a} OMMEB-Ver, N3, E2, P5**; lo anterior significa que dicho ejercicio corresponde la 4.^{a} OMMEB en el estado de Veracruz, del Nivel 3, del Examen selectivo 2, Problema 5. En el caso de los problemas correspondientes a la 2.^{a} OMMEB se omite el número de examen y el nivel, puesto que se utilizó un solo examen selectivo para todos los niveles.

El capítulo 1 contiene ejercicios que, en mayor parte, están relacionados con la geometría, el capítulo 2 aquellos concernientes a la aritmética. Los capítulos 3 y 4 corresponden, respectivamente, a los temas de álgebra y conteo, mientras que el capítulo 5 contiene ejercicios vinculados con lógica. Se incluyen en la parte final del libro las referencias bibliográficas utilizadas a lo largo del mismo.

Los autores esperamos que el contenido de este libro sea de utilidad para los docentes veracruzanos y todos aquellos estudiantes interesados en desarrollar sus habilidades de razonamiento matemático.

Xalapa-Enríquez, Ver., mayo de 2023.

Introducción

La Real Academia Española (2006) define **matemática** en los siguientes términos: “Como la ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones”. Desde pequeños solemos escuchar que su aprendizaje es “difícil”, incluso “imposible”, por lo tanto no es de sorprenderse que los estudiantes, a temprana edad, muestren antipatía y temor por los cursos de matemáticas, impactando en los resultados de aprovechamiento de esta ciencia.

En el año 2000 la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) puso en marcha el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés), el cual consiste en exámenes mundiales realizados cada tres años, cuya finalidad es la valoración internacional de estudiantes en edad promedio de 15 años, correspondiente a alumnos que se encuentran al final de la educación obligatoria. En PISA 2018, los estudiantes mexicanos obtuvieron un puntaje bajo respecto del promedio OCDE en lectura, matemáticas y ciencias, ya que solo el 1 % de ellos alcanzó un desempeño dentro de los niveles de competencia más altos (nivel 5 o 6) de al menos un área de las tres referidas, mientras el 35 % no logró un nivel mínimo de competencia (nivel 2) en tales tres áreas (OECD, 2022).

En lo relativo al área de matemáticas, alrededor del 44 % de los estudiantes en México alcanzó el nivel 2 o superior. Esto significa que los estudiantes pueden interpretar y reconocer, sin instrucciones directas, cómo se puede representar matemáticamente una situación (simple), por ejemplo, comparar la distancia total de dos rutas alternativas o convertir los precios en una moneda diferente.

Dichos porcentajes confirman que “el conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que los alumnos lo puedan usar hábilmente para solucionar problemas y que lo puedan reconstruir en caso de olvido” (SEP, 2011, p. 76); esto es, se debe procurar desarrollar el pensamiento matemático, el cual se refiere a la capacidad de usar las matemáticas como herramienta para resolver distintas situaciones o problemas reales y conlleva a los alumnos a experimentar y percatarse de su utilidad. De esta manera, de acuerdo con el Plan de estudio para la educación preescolar, primaria y secundaria 2022, se daría solución a

> una de las críticas que históricamente se ha hecho al proceso de formación de la educación preescolar, primaria y secundaria es el “encapsulamiento del aprendizaje” que delimita el conocimiento en un contenido descriptivo, clasificatorio y, por tanto, que no puede llevarse a la vida concreta de las niñas, niños y adolescentes. (SEP, 2022, p. 26)

Visto desde su operación, el aprendizaje debe proponer ideas generativas en lugar de conocimientos enciclopédicos sobre los hechos desde la intención formativa de ir de lo abstracto a lo concreto (SEP, 2022). En este sentido, la Nueva Escuela Mexicana considera que, desde el 3.^{er} grado de primaria, las matemáticas deben enseñarse a partir de desafíos matemáticos. Precisamente, en la introducción del texto de 3.^{er} grado puede resaltarse:

> ¿Por qué tu libro se llama "Desafíos matemáticos"? Porque en él hay actividades en las que, además de divertirte, buscarás estrategias que te ayuden a ganar, cuando se trata de juegos, o a responder las preguntas que se hacen. Al realizar las actividades desarrollarás habilidades, al mismo tiempo que aprendes matemáticas. (Rosales Ávalos *et al.*, 2019b, p. 7)

Mientras que en los libros de 4.^{o} a 6.^{o} grados se lee:

> Es importante que aproveches lo que te ofrecen estos desafíos: construir procedimientos y estrategias para resolverlos; aprender a tomar decisiones sobre cuál es el mejor camino a seguir; escuchar la opinión de los demás; retomar aquello que enriquece tus puntos de vista y la manera en que resuelves los problemas. (Rosales Ávalos *et al.*, 2019a, p. 8)

Buscar estrategias, desarrollar habilidades, construir procedimientos, tomar decisiones y trabajar en equipo son algunos de los fines que se persiguen en las olimpiadas de matemáticas para educación básica.

OMMEB

Para fomentar, desarrollar y evaluar las habilidades del pensamiento antes mencionadas, se han creado concursos de matemáticas para jóvenes estudiantes, ya con una larga tradición en varios países del mundo. Por ejemplo, en Francia los concursos generales se realizan desde el siglo XVIII y en Hungría las competencias Eótvos desde 1894.

En México, la primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) se realizó en 1987, organizada por la Sociedad Matemática Mexicana, teniendo entre sus fines:

- Compartir objetivos de la Olimpiada Internacional.
- Detectar alumnos con habilidades en las matemáticas, para estimularlas y potenciarlas.
- Fomentar el estudio de las matemáticas.
- Establecer un ámbito de encuentro para docentes, donde sea posible intercambiar experiencias sobre la enseñanza de esta disciplina.
- Promover el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas proporcionando a maestros y alumnos nuevas perspectivas.

En la búsqueda para alcanzar estos fines y conscientes de que el gusto o rechazo por las matemáticas, la creatividad y la argumentación son parte de los conocimientos, habilidades y actitudes desarrolladas durante la educación básica, en 2017, la OMM organizó la primera **Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica** (OMMEB) en los niveles de primaria y secundaria.

Dicha olimpiada considera tres categorías de participación: Nivel 1 (4.^{o} y 5.^{o} de primaria), Nivel 2 (6.^{o} de primaria y 1.^{o} de secundaria) y Nivel 3 (2.^{o} de secundaria). Cada estado puede participar con un equipo por nivel, y cada equipo debe estar integrado por un máximo de cuatro personas: un líder, y tres estudiantes participantes.

El estado de Veracruz ha participado en los últimos cinco concursos nacionales de la OMMEB. Su primera intervención la realizó con una delegación integrada por estudiantes que asistían al curso-taller Mateclub, organizado este por la Facultad de Matemáticas de la Universidad Veracruzana; para su segunda participación, en 2019 y hasta la fecha, las delegaciones han sido conformadas a través de un proceso selectivo dictado por convocatoria. Los resultados obtenidos en el concurso nacional han sido los siguientes:

Mérida, Yuc., 2018

- Nivel 1. Una mención honorífica.
- Nivel 2. Una mención honorífica.
- Nivel 3. Una mención honorífica y dos medallas de bronce.

Oaxtepec, Mor., 2019

- Nivel 1. Una mención honorífica.
- Nivel 2. Dos menciones honoríficas.
- Nivel 3. Una mención honorífica y dos medallas de bronce.

Virtual, 2020

- Nivel 1. Una mención honorífica y una medalla de bronce.
- Nivel 2. Una medalla de Bronce.
- Nivel 3. Una mención honorífica y una medalla de oro.

Virtual, 2021

- Nivel 1. Una mención honorífica, una medalla de bronce y una medalla de plata.
- Nivel 2. Una mención honorífica y dos medallas de bronce.
- Nivel 3. Una mención honorífica y dos medallas de plata.

Virtual, 2022

- Nivel 1. Una medalla de bronce, una medalla de plata y una medalla de oro.
- Nivel 2. Dos medallas de bronce y una medalla de plata.
- Nivel 3. Dos menciones honoríficas y una medalla de plata.

Debe destacarse que los dos últimos años, cada uno de los integrantes de la delegación obtuvo un reconocimiento en el concurso nacional y que el número de medallas aumentó respecto a años anteriores. Más aún, se tiene el registro de que varios estudiantes participantes en los niveles 2 y 3 de la OMMEB 2021 actualmente concursan en la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, organizada para estudiantes preuniversitarios, con lo que queda manifiesto que la OMMEB está cumpliendo con fomentar el interés por las matemáticas.

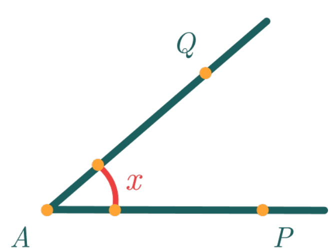
Capítulo 1
Geometría

1.1. Definiciones y resultados básicos

En esta sección presentaremos en forma sintética las definiciones y propiedades básicas de geometría que utilizaremos para resolver los problemas relacionados con este tema. Si se desea estudiar en forma más extensa estos temas se puede encontrar más información en Gómez Ortega *et al*. (2019), Bulajich Manfrino y Gómez Ortega (2002), Pogorelov (1998) y Wentworth y Smith (2000).

1. 1. 1. Ángulos

Definición 1. Un **ángulo** es la abertura formada por dos semirrectas que se unen en un mismo punto al cual llamaremos vértice.

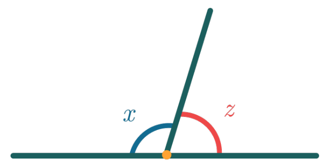


Si el vértice del ángulo es A y los puntos P y Q pertenecen a las distintas semirrectas que lo determinan, es común denotar al ángulo x de la figura de las siguientes formas:

$$x = \measuredangle A = \measuredangle PAQ = \measuredangle QAP.$$

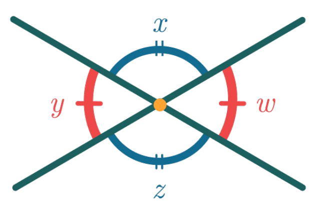
Cualquiera de ella es válida y las utilizaremos en forma indistinta dependiendo del contexto. También es frecuente utilizar letras griegas para nombrar a los ángulos.

Definición 2. Si dos ángulos x y z están subtendidos por una recta a la cual pertenece su vértice común, diremos que son **adyacentes**. Además, como ellos suman $180°$ diremos que son **suplementarios** y que cada uno es el suplemento del otro. De esta manera dos ángulos x y z son suplementarios si y solo si $x + z = 180°$.



Observemos que si una pareja de ángulos suplementarios son iguales, entonces necesariamente tienen que medir $90°$; en este caso diremos que cada uno de ellos es un **ángulo recto**. Cuando una recta corta a otra formando ángulos rectos decimos que las rectas son **perpendiculares**.

Supongamos que tenemos dos rectas que se cortan entre sí, el punto de intersección será un vértice común a cuatro ángulos. Para tal caso tenemos la siguiente clasificación para los ángulos en cuanto a la posición que ocupan con respecto al punto de intersección de las rectas.



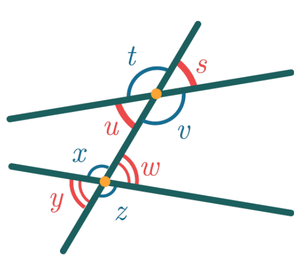
Opuestos por el vértice	Adyacentes
w, y	w, x
x, z	x, y
	y, z
	z, w

Propiedades de ángulos entre rectas

En todo sistema de dos rectas distintas que se cortan, tenemos que:

1. Los ángulos adyacentes son suplementarios.
2. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

En un sistema de dos rectas cortadas por una secante o transversal podemos clasificar los ángulos de acuerdo a la posición que ocupan con respecto a los sistemas adyacentes.



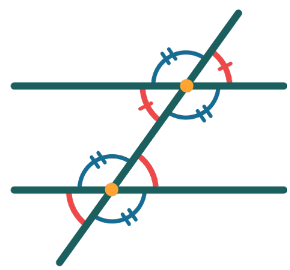
Correspondientes
s, w
t, x
u, y
v, z

Alternos	Colaterales	
u, w v, x	u, x v, w	Internos
s, y t, z	s, z t, y	Externos

En particular, cuando el sistema está constituido por dos rectas paralelas distintas cortadas por una secante, se tiene que:

1. Los ángulos correspondientes son iguales.
2. Los ángulos alternos (internos y externos) son iguales.
3. Los ángulos colaterales (internos y externos) son suplementarios.

En otras palabras, en un sistema de dos rectas paralelas cortadas por una secante tendremos, a lo más, dos ángulos diferentes, distribuidos como en la figura.



Cuando la secante es perpendicular a las rectas paralelas, todos los ángulos son iguales a $90°$.

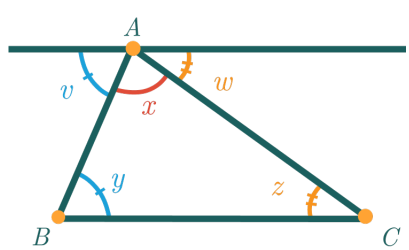
Será importante y útil tomar en cuenta que la implicación inversa también es válida, es decir, que cuando ocurre alguna de las igualdades entre las parejas de ángulos mencionadas, entonces las rectas serán paralelas.

Estas propiedades se pueden utilizar para verificar el siguiente par de relaciones para ángulos en triángulos.

► Ejemplos

1. Probar que la suma de los tres ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a $180°$.

   Consideremos que en un triángulo $\triangle ABC$, los ángulos interiores x, y y z son los correspondientes a los vértices A, B y C, respectivamente. Tracemos una recta paralela al segmento BC que pase por A, y consideremos v y w los ángulos con vértice en A como en la figura.



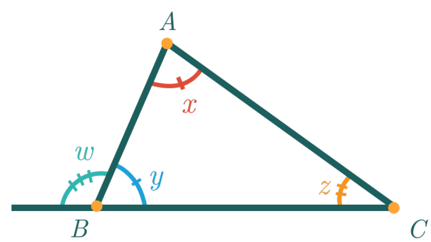
Por estar subtendidos por una recta tenemos que

$$v + x + w = 180^\circ$$

Además, por ser ángulos alternos internos, tenemos $v = y$ y $w = z$. Sustituyendo estos valores en la primera relación se garantiza la afirmación.

2. Probar que en todo triángulo, cada ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores que no le son adyacentes, es decir los que le son opuestos.

   Para probar esta afirmación, consideremos un triángulo $\triangle ABC$, con ángulos interiores x, y y z como antes. Sea w el ángulo exterior en el vértice B, como en la figura.



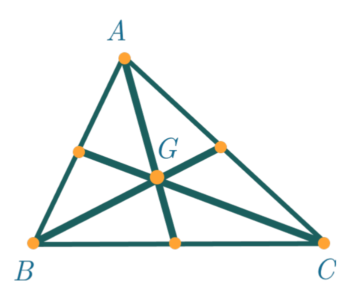
   Por lo anterior, $x + y + z = 180^\circ$. Como y y w son suplementarios, es decir $y + w = 180^\circ$, entonces

$$w = x + z.$$

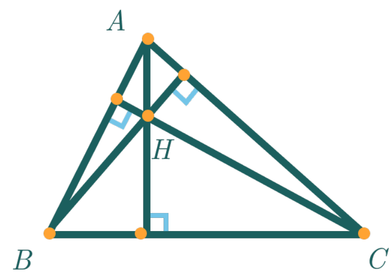
1. 1. 2. Triángulos

Existen algunas líneas y puntos en los triángulos que se llaman líneas y puntos distinguidos, pues aparece con frecuencia y poseen cualidades especiales, una de ellas es que son **concurrentes**, es decir que se cortan en un solo punto.

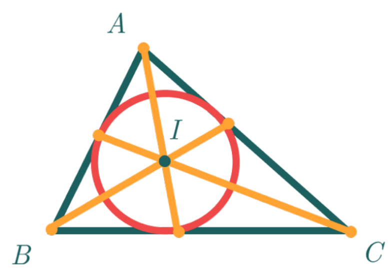
Una **mediana** en un triángulo es un segmento trazado del punto medio de un lado al vértice opuesto. Al punto de intersección G de las tres medianas de un triángulo $\triangle ABC$ le llamaremos **gravicentro**. Este punto también es conocido como **centroide**, **baricentro** o **centro de gravedad**.



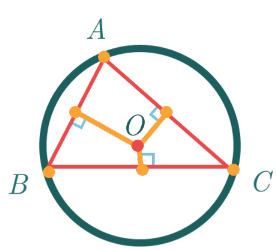
Una **altura** en un triángulo es el segmento determinado por un vértice y el pie de este en el lado opuesto. El punto H en donde concurren las tres alturas de un triángulo $\triangle ABC$ le llamaremos **ortocentro**.



La **bisectriz** de un ángulo es la recta que lo divide en dos ángulos iguales. En particular, una bisectriz en un triángulo es una línea que sale de un vértice y divide al ángulo interior en dos partes iguales. Al punto I en donde concurren las tres bisectrices de un triángulo $\triangle ABC$ le llamaremos **incentro**, que es el centro de la circunferencia tangente interiormente a cada uno de los lados de $\triangle ABC$, dicha circunferencia se llama el **incírculo** de $\triangle ABC$ y el radio de dicha circunferencia se llama el **inradio**.



La **mediatriz** de un segmento es la recta que pasa por el punto medio y es perpendicular a dicho segmento. En particular una mediatriz en un triángulo es una línea que pasa por el punto medio de un lado y es perpendicular a él. El punto O en donde se intersecan las mediatrices de un triángulo $\triangle ABC$ le llamaremos **circuncentro**, que es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices de $\triangle ABC$, dicha circunferencia se llama el **circuncírculo** de $\triangle ABC$ y el radio de dicha circunferencia se llama el **circunradio**.



Existen algunas propiedades que poseen estas líneas distinguidas, las cuales son útiles para reolver algunos ejercicios, entre ellas destacan las siguientes:

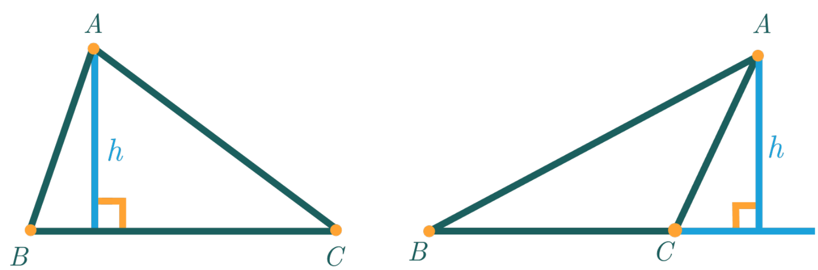
1. Cualquier pareja de medianas en un triángulo se cortan en un tercio de la longitud total de cada una.

2. La bisectriz de un ángulo es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de cada lado del ángulo.

3. La mediatriz de un segmento es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento.

El área de un triángulo $\triangle ABC$ está determinada por las medidas de su base y altura

$$(\triangle ABC) = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{BC \cdot h}{2}.$$



Observemos que para triángulos diferentes, no importa cuánto midan los otros lados, mientras la base y la altura permanezcan iguales, las áreas serán las mismas.

Relaciones entre áreas de dos triángulos

1. Si dos triángulos tienen un par de bases iguales, entonces la razón entre sus áreas es igual a la razón entre las alturas correspondientes.

2. Si dos triángulos tienen un par de alturas iguales, entonces la razón entre sus áreas es igual a la razón entre las bases correspondientes.

Teorema 1 (de Pitágoras)**.** En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Si para un triángulo $\triangle ABC$ se cumple que $BC^2 = AB^2 + AC^2$, entonces tal triángulo es rectángulo. En particular el ángulo en A es recto.

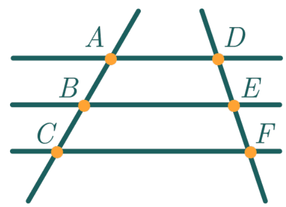
1. 1. 3. Teorema de Tales

Un resultado que nos habla de proporcionalidad entre segmentos es el siguiente.

Teorema 2 (de Tales en rectas paralelas)**.** Si tres o más paralelas son cortadas por cualesquiera dos transversales, entonces los respectivos segmentos que las paralelas determinan en estas últimas rectas son proporcionales.

Este teorema nos garantiza que si consideramos tres rectas paralelas y suponemos que dos tranversales cortan a las primeras en los puntos A, B, C y D, E, F respectivamente, entonces se deben cumplir las siguientes relaciones de proporcionalidad entre los segmentos formados en las transversales:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}, \quad \frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF} \quad \text{y} \quad \frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}.$$



Debemos notar que si se cumplen las relaciones anteriores, también deben ser válidas las igualdades entre sus inversos multiplicativos:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{DE}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF} \quad \text{y} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}.$$

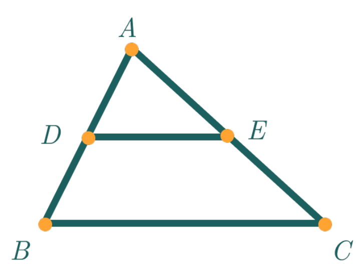
Es importante señalar que en el Teorema de Tales no se pide ninguna condición sobre las rectas transversales, éstas podrían incluso ser paralelas o cortarse. Un caso particular importante es cuando las transversales se cortan sobre una de las paralelas, obteniendo el siguiente resultado.

Teorema 3 (de Tales en triángulos)**.** Si una recta paralela a uno de los lados de un triángulo corta a los otros lados, entonces los segmentos formados en estos últimos son proporcionales

Lo que nos dice este resultado es que para un triángulo cualquiera $\triangle ABC$, si D y E son puntos en AB y AC respectivamente, tales que DE es paralelo a BC, entonces

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{y} \quad \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}.$$

Además de las relaciones anteriores tambien se cumplen las igualdades entre sus inversos multiplicativos.



El resultado inverso también es cierto, es decir, si una recta corta a dos lados de un triángulo formando segmentos proporcionales, entonces dicha recta es paralela al tercer lado.

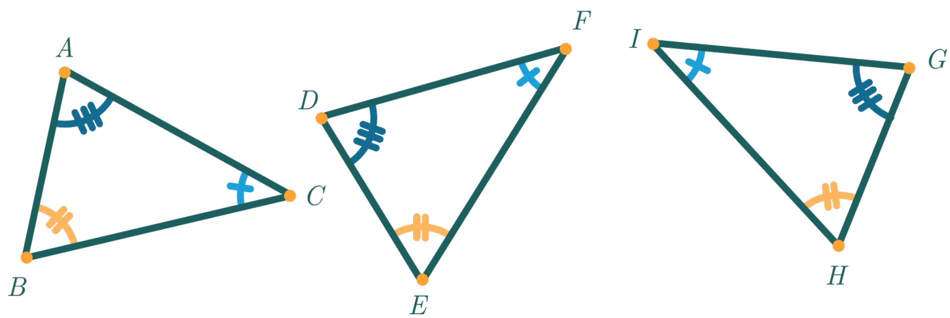
1. 1. 4. Semejanza de triángulos

Definición 3. Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son **semejantes** si y solo si los ángulos correspondientes son iguales y los lados correspondientes son proporcionales, es decir, si cumplen las siguientes relaciones

$$\measuredangle A = \measuredangle D, \quad \measuredangle B = \measuredangle E, \quad \measuredangle C = \measuredangle F \quad \text{y} \quad \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}.$$

Para indicar que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son semejantes lo haremos de la siguiente manera

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$



Es importante notar que, para obtener las razones de semejanza adecuadas debemos expresar los cocientes con los lados correspondientes, dicho orden entre los vértices lo podemos obtener a partir de los ángulos correspondientes. En el caso de los dos primeros triángulos el orden que siguen los vértices va en el sentido contrario a las manecillas del reloj, mientras que en el tercero se hace a la inversa. Esto lo podemos expresar de la forma $\triangle ABC \sim \triangle DEF \sim \triangle GHI$. Si nosotros identificamos previamente el orden correspondiente de los vértices, podemos obtener las proporciones en forma inmediata.

Criterios de semejanza

Para que $\triangle ABC$ sea semejante a $\triangle DEF$ es suficiente que se cumpla alguna de las tres condiciones siguientes:

AA. Dos ángulos iguales, por ejemplo

$$\measuredangle A = \measuredangle D \text{ y } \measuredangle B = \measuredangle E.$$

LAL. Dos parejas de lados proporcionales e igual el ángulo comprendido entre ellos, por ejemplo

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \text{ y } \measuredangle A = \measuredangle D.$$

LLL. Las tres parejas de lados proporcionales

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}.$$

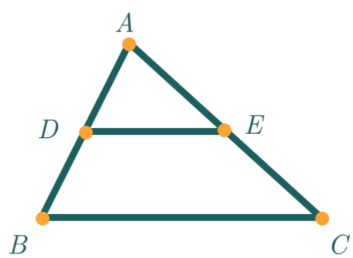
De esta manera, cada una de las condiciones AA, LAL o LLL implica todas las relaciones que tenemos en la definición 3.

Las relaciones que aparecen en los siguientes ejemplos se pueden obtener utilizando los criterios de semejanza. Vale la pena recordarlas pues aparecerán en la solución de algunos problemas.

► **Ejemplos**

1. Probar que el segmento que une los puntos medios de cualesquiera dos lados de un triángulo arbitrario mide la mitad del tercer lado y es paralelo a dicho lado.

   Para verificar que se cumple esta afirmación consideremos los puntos medios D y E de los lados AB y AC, respectivamente, de un triángulo arbitrario $\triangle ABC$.

   Como $\measuredangle BAC = \measuredangle DAE$ y $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{2} = \frac{AE}{AC}$, entonces por el criterio de semejanza LAL, tenemos que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, con razón de semejanza igual a

   $$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2},$$

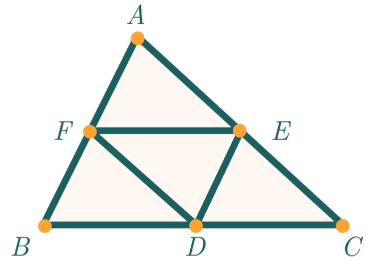
   lo cual implica que $DE = \frac{1}{2}BC$. Además, los ángulos correspondientes son iguales, en particular tenemos que

   $$\measuredangle AED = \measuredangle ACB.$$

   Como dichos ángulos son correspondientes en el sistema de rectas DE y BC cortadas por la secante AC, entonces DE y BC son paralelos.

2. Probar que el triángulo medial, formado por los puntos medios de los lados de cualquier triángulo, es siempre semejante a este y su área es una cuarta parte del área del triángulo original.

   Sean D, E, F los puntos medios de los lados BC, AC y AB, respectivamente, de un triángulo cualquiera $\triangle ABC$.



Por la proposición anterior, aplicada a cada uno de los lados de $\triangle ABC$, tenemos que $EF = \frac{1}{2}BC$, $DE = \frac{1}{2}AB$ y $DF = \frac{1}{2}AC$. Por lo tanto,

$$\frac{DE}{BC} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Por el criterio de semejanza de LLL concluímos que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Análogamente, para los otros tres triángulos formados tenemos que

$$\triangle AFE \simeq \triangle FBD \simeq \triangle EDC \simeq \triangle DEF.$$

Podemos concluir que los triángulos pequeños tienen áreas iguales a un cuarto del área del triángulo original $\triangle ABC$:

$$(\triangle ADE) = (\triangle DBF) = (\triangle EFC) = (\triangle FED) = \frac{1}{4}(\triangle ABC).$$

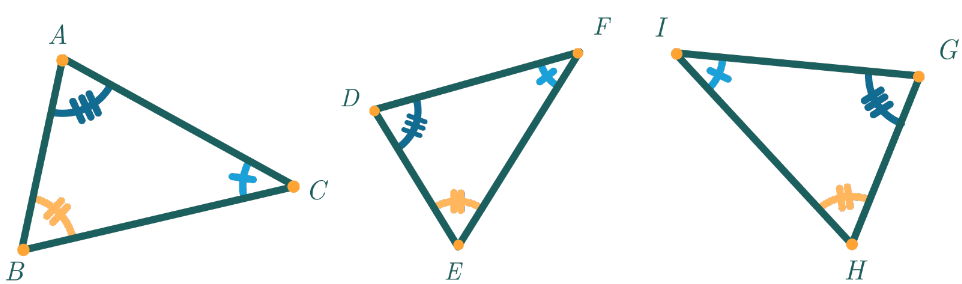
Es relevante señalar un caso particular de semejanza, cuando la razón es igual a 1. En este caso obtenemos triángulos cuyos lados y ángulos interiores son iguales.

Definición 4. Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son **congruentes** o **iguales** si y solo si tanto sus lados como sus ángulos correspondientes son iguales, es decir

$$\begin{aligned} \measuredangle A &= \measuredangle D, & AB &= DE, \\ \measuredangle B &= \measuredangle E, & BC &= EF, \\ \measuredangle C &= \measuredangle F, & AC &= DF. \end{aligned}$$

Para indicar que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son congruentes lo haremos de la siguiente manera

$$\triangle ABC \simeq \triangle DEF.$$



Los criterios para decidir que dos triángulos son congruentes son heredados de los criterios de semejanza, considerando además que la razón de semejanza es igual a 1. Podemos expresar estos criterios como sigue.

Criterios de congruencia

Para que $\triangle ABC \simeq \triangle DEF$ es suficiente que se cumpla alguna de las siguientes tres condiciones:

ALA. Dos ángulos iguales e igual la pareja de lados comprendidos entre los ángulos, por ejemplo

$$\measuredangle A = \measuredangle D, AB = DE \text{ y } \measuredangle B = \measuredangle E.$$

LAL. Dos parejas de lados iguales e igual el ángulo comprendido entre ellos, por ejemplo

$$AB = DE, \measuredangle A = \measuredangle D \text{ y } AC = DF.$$

LLL. Las tres parejas de lados iguales

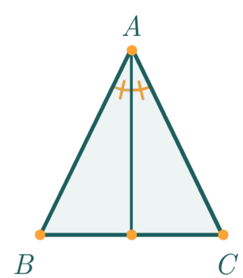
$$AB = DE, BC = EF \text{ y } AC = DF.$$

De esta manera, al igual que con los criterios de semejanza, cada una de las condiciones ALA, LAL o LLL implica todas las relaciones que tenemos en la definición 4.

► Ejemplo

Probar que si un triángulo es isósceles, es decir que tiene dos de sus lados iguales, entonces tiene dos ángulos iguales, los ángulos opuestos a dichos lados.

Consideremos un triángulo $\triangle ABC$ tal que $AB = AC$. Sea D en BC tal que AD es la bisectriz del ángulo interior del vértice A.



Como el lado AD es compartido entre los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$, podemos utilizar el criterio de congruencia LAL para asegurar que

$$\triangle ABD \simeq \triangle ACD.$$

De donde podemos deducir que

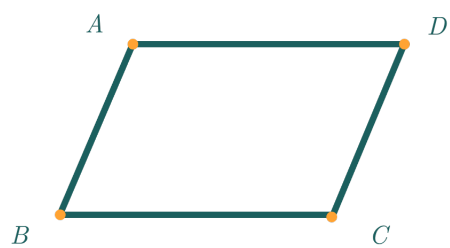
$$\measuredangle ABD = \measuredangle ACD.$$

Observemos que, al resolver el ejercicio anterior, obtuvimos los triángulos congruentes $\triangle ABD \simeq \triangle ACD$, lo cual implica que D es punto medio de BC, además de que AD y BC son perpendiculares. Como consecuencia de lo anterior podemos asegurar que en cualquier triángulo isósceles hay una línea que es simultáneamente: bisectriz, mediana, altura y mediatriz, correspondiente al lado que se encuentra entre los lados iguales.

Además de lo anterior, podemos asegurar que un triángulo equilátero, el cual tiene todos sus lados iguales, también tiene todos sus ángulos interiores iguales a $60°$.

1. 1. 5. Paralelogramos

Definición 5. Un **paralelogramo** es un cuadrilátero en el que cada lado es paralelo a su opuesto.



Propiedades de paralelogramos

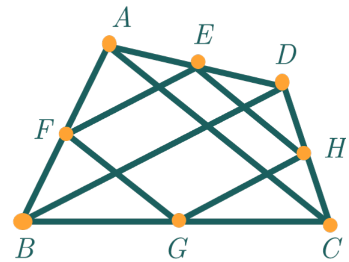
1. Los lados opuestos son iguales.
2. Los ángulos interiores opuestos son iguales.
3. Los ángulos interiores consecutivos son suplementarios.
4. Las diagonales se cortan en su punto medio.

Inversamente, si un cuadrilátero cualquiera satisface alguna de las propiedades anteriores entonces será un paralelogramo.

► **Ejemplo**

Probar el Teorema de Varignon, el cual establece que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero determinan un paralelogramo; además, su perímetro es igual a la suma de las longitudes de las diagonales y su área es igual a la mitad del área del cuadrilátero original, respectivamente.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero y sean E, F, G y H los puntos medios de los lados AD, AB, BC y CD, respectivamente.



Por las hipótesis establecidas, EH, AC y FG son paralelos, al igual que FE, BD y GH; además

$$\begin{aligned} EH &= \frac{1}{2}AC = FG, \\ EF &= \frac{1}{2}BD = GH. \end{aligned}$$

De esta manera, afirmamos que $EFGH$ es un paralelogramo. Por las igualdades anteriores podemos obtener el perímetro del paralelogramo $EFGH$ sustituyendo la longitud de sus lados

$$EF + FG + GH + EH = \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}AC = AC + BD.$$

Finalmente, es posible calcular el área del paralelogramo al restar del área del cuadrilátero $ABDC$ el área de los triángulos $\triangle AFE$, $\triangle BGF$, $\triangle CHG$ y $\triangle DEH$, esto es

$$\begin{aligned} (EFGH) &= (ABCD) - (\triangle AFE) - (\triangle BGF) - (\triangle CHG) - (\triangle DEH) \\ &= (ABCD) - \frac{1}{4}(\triangle ABD) - \frac{1}{4}(\triangle BCA) - \frac{1}{4}(\triangle CDB) \\ &\quad - \frac{1}{4}(\triangle DAC) \\ &= (ABCD) - \frac{1}{4}\{2(ABCD)\} \\ &= \frac{1}{2}(ABCD). \end{aligned}$$

1. 1. 6. Circunferencias

En las circunferenicas podemos distinguir algunas líneas particulares, estas son:

- El **radio**, es un segmento que va del centro a un punto sobre la circunferencia. Todos los radios tienen la misma magnitud.

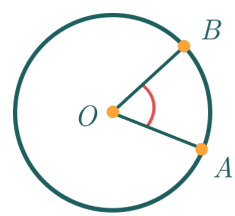
- Una **cuerda** es un segmento que une dos puntos sobre la circunferencia. Las porciones de circunferencia determinadas por los extremos de la cuerda se llamarán **arcos**, cada cuerda determinará dos arcos.
- El **diámetro**, es la cuerda de magnitud más grande, por lo que será cualquiera que pase por el centro de la circunferencia y, por lo tanto, su magnitud será el doble de la del radio. En este caso los arcos determinados serán iguales a la mitad de la circunferencia.
- Una **secante**, es la recta que se obtiene al extender cualquier cuerda, por lo que será una recta que corte a la circunferencia en dos puntos.
- Una **tangente**, es una recta que toca a la circunferencia en un solo punto. Esta recta será perpendicular al radio que une el punto de tangencia con el centro de la circunferencia.

Como un ángulo se forma cuando dos rectas se cortan, entonces tendremos diferentes tipos de ángulos, de acuerdo a las líneas en la circunferencia que los generen.

Un **ángulo central** es el formado por dos radios en una circunferencia. Por lo tanto, dados dos puntos A y B en una circunferencia, el ángulo central $\measuredangle AOB$ es el que tiene su vértice en el centro O de la circunferencia y sus lados son los radios OA y OB.

La medida el ángulo central estará determinado por el arco correspondiente, que se encuentra entre los lados del ángulo

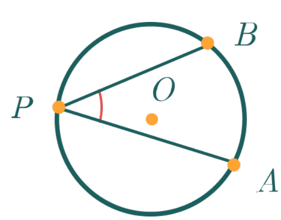
$$\measuredangle AOB = \overset{\frown}{AB}\ .$$



Un **ángulo inscrito** es el formado por dos cuerdas que tienen un extremo en común. Por lo tanto dados tres puntos A, B y P en una circunferencia, el ángulo inscrito $\measuredangle APB$ es el ángulo que tiene su vértice P en la circunferencia y sus lados PA y PB son secantes.

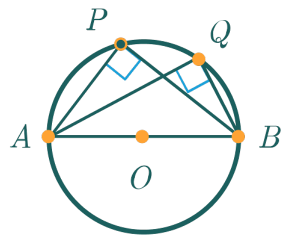
Todo ángulo inscrito mide la mitad del arco que abraza

$$\measuredangle APB = \frac{1}{2}\ \overset{\frown}{AB}\ .$$

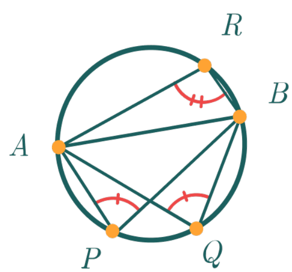


Propiedades de ángulos inscritos

1. Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia, subtendido por el diámetro, es recto.



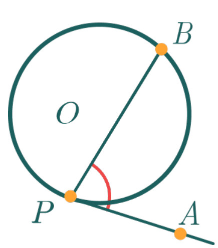
2. Dos ángulos inscritos en una misma circunferencia y que abrazan una misma cuerda, son iguales si sus vértices están del mismo lado de la cuerda; y son suplementarios si sus vértices están en lados opuestos respecto de la cuerda.



Un **ángulo semi-inscrito** está formado por una cuerda y una tangente que se intersecan en el punto de tangencia. De esta manera, un ángulo semi-inscrito es aquel que tiene su vértice en la circunferencia, uno de sus lados es tangente y el otro secante.

La medida del ángulo semi-inscrito es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados

$$\measuredangle APB = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{PB}\ .$$

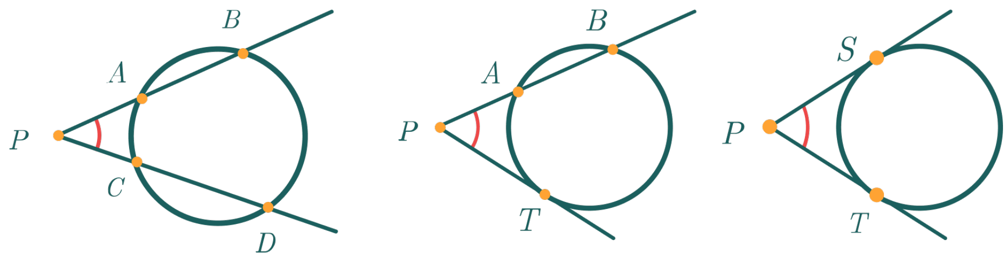


Un **ángulo exterior** es el formado por dos rectas secantes, o por una secante y una tangente, o por dos tangentes que se intersecan en un punto exterior a una circunferencia y que cortan a la circunferencia en 4, 3 o 2 puntos, respectivamente.

Todo ángulo exterior a una circunferencia mide la semi-diferencia de los arcos comprendidos entre sus lados. En caso de estar formado por dos secantes tenemos

$$\measuredangle DPB = \frac{1}{2}\left(\widehat{DB} - \widehat{AC}\right).$$

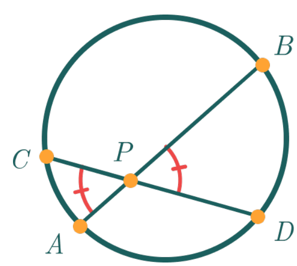
Cuando la secante CD se conviente en tangente, entonces $C = D = T$; mientras que si la secante AB se convierte en tangente, entonces $A = B = S$. En todos los casos al arco mayor se le resta el arco menor.



Un **ángulo interior** en una circunferencia es el formado por dos cuerdas de la circunferencia que se cortan en un punto interior.

Un ángulo interior en una circunferencia mide la semi-suma de las medidas de los arcos comprendidos por sus lados y por sus prolongaciones.

$$\measuredangle DPB = \frac{1}{2}\left(\widehat{DB} + \widehat{AC}\right).$$



Medida de arcos entre rectas paralelas

Si dos rectas paralelas intersecan a una circunferencia, entonces los arcos determinados entre ellas son iguales.

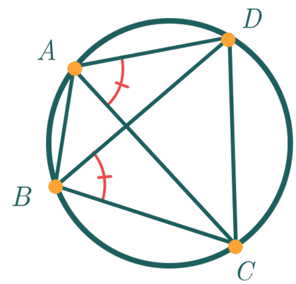
Definición 6. Diremos que un cuadrilátero es **cíclico** si todos sus vértices se encuentran en una misma circunferencia.

A partir del comportamiento de los ángulos delimitados por sus lados y diagonales, hay dos formas de determinar cuándo los vértices de un cuadrilátero están en una misma circunferencia. Para esto se utiliza lo que conocemos de ángulos inscritos.

El cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, si ocurre alguna de las siguientes condiciones:

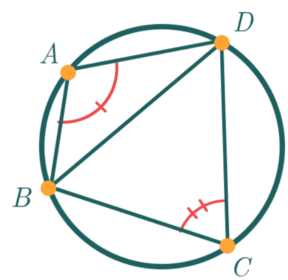
- Desde dos vértices consecutivos se ve el lado puesto bajo ángulos iguales

$$\measuredangle CAD = \measuredangle CBD.$$



- Desde dos vértices opuestos se ve la diagonal, determinada por los otros dos vértices, bajo ángulos suplementarios

$$\measuredangle BAD + \measuredangle DCB = 180°.$$



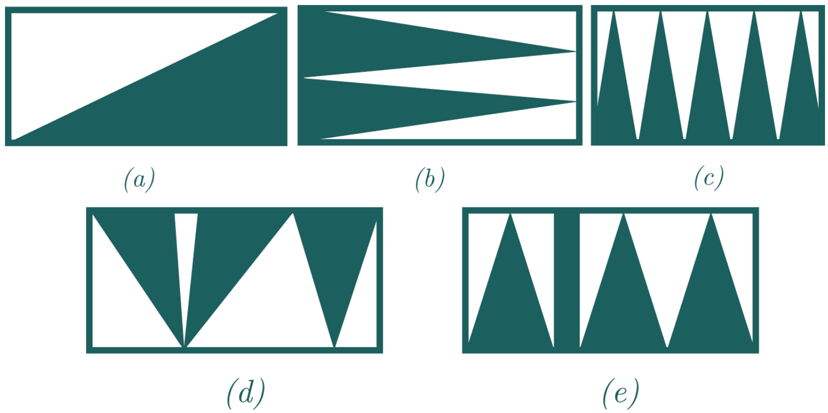
1.2. Problemas de geometría, nivel 1

Los problemas que se presentan a continuación formaron parte de los exámenes eliminatorios de la OMMEB en Veracruz. Para poder identificarlos se les ha asignado una notación como la siguiente: **5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P3**; lo anterior significa que dicho ejercicio corresponde a la 5.^{a} OMMEB de Veracruz, del Nivel 1, del Examen selectivo 2, Problema 3. En el caso de los problemas correspondientes a la 2.^{a} OMMEB se omite el número de examen y el nivel, puesto que se utilizó solo un examen selectivo para todos los niveles.

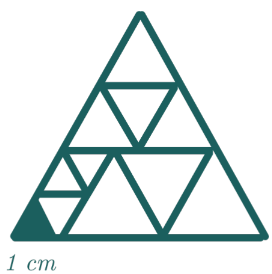
El nivel 1 en la OMMEB refiere a cuarto y quinto grados de primaria.

1. 2. 1. Preguntas de opción múltiple

Problema 1.1. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E1, P2). Un rectángulo se sombreó en las cinco distintas maneras que se muestran. ¿En cuál de las figuras el área sombreada es mayor?



Problema 1.2. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E1, P3). Un triángulo equilátero se divide en triángulos equiláteros más pequeños como se muestra. Si el triángulo sombreado mide $1\ \mathrm{cm}$ de lado, ¿cuál es el perímetro del triángulo original?



(a) $15\ \mathrm{cm}$

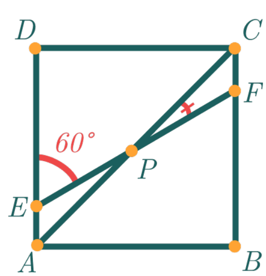
(b) $17\ \mathrm{cm}$

(c) $18\ \mathrm{cm}$

(d) $20\ \mathrm{cm}$

(e) $21\ \mathrm{cm}$

Problema 1.3. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E1, P4). Si $ABCD$ es un cuadrado y el ángulo $\measuredangle PED$ mide $60°$, ¿cuánto mide el ángulo $\measuredangle FPC$?



(a) 5°

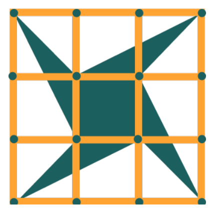
(b) 10°

(c) 15°

(d) 20°

(e) Ninguna de las anteriores

Problema 1.4. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P1). Considerando que, en la cuadrícula formada, los lados de cada cuadrito miden $1\ \mathrm{cm}$, ¿cuál es el área de la estrella ninja formada?



(a) $2\ \mathrm{cm}^2$

(b) $3\ \mathrm{cm}^2$

(c) $4\ \mathrm{cm}^2$

(d) $5\ \mathrm{cm}^2$

(e) Ninguna de las anteriores

Problema 1.5. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P1). En la siguiente figura el triángulo más grande es equilátero y tiene área igual a 1. Si los triángulos más pequeños se formaron uniendo los puntos medios del triángulo correspondiente, ¿cuánto vale el área sombreada?

(a) $\frac{9}{16}$

(b) $\frac{11}{16}$

(c) $\frac{41}{64}$

(d) $\frac{51}{64}$

(e) Ninguna de las anteriores

Problema 1.6. (5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P3). El área del cuadrado más grande de la figura es $16\ \mathrm{cm}^2$, mientras que el área de cada uno de los cuatro cuadrados pequeños en las esquinas del grande es $1\ \mathrm{cm}^2$. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

(a) $3\ \mathrm{cm}^2$

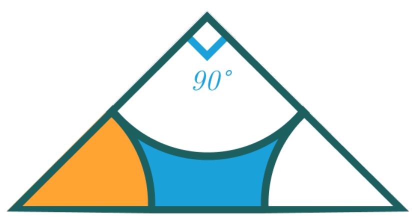
(b) $\frac{7}{2}\ \mathrm{cm}^2$

(c) $\frac{11}{2}\ \mathrm{cm}^2$

(d) $6\ \mathrm{cm}^2$

(e) Ninguna de las anteriores

Problema 1.7. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E3, P3). En la siguiente imagen se muestra un triángulo rectángulo isósceles el cual tiene inscrito tres sectores circulares que tienen su centro en los vértices del triángulo; además los sectores se tocan en los puntos medios de cada cateto. Si el área del sector naranja es igual a 2π, encuentra el valor del área azul que queda al quitar al área del triángulo el área de los sectores circulares.



(a) $32 - 6\pi$

(b) $512 - 8\pi$

(c) $32 - 8\pi$

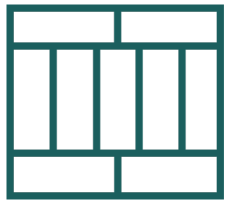
(d) $16 - 8\pi$

(e) Ninguno de los anteriores

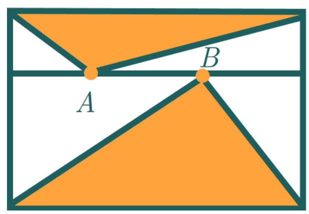
1. 2. 2. Preguntas abiertas

Problema 1.8. (2.^{a} OMMEB-Ver., P1). Las longitudes de los lados de un triángulo son 6, 10 y 11. Se dibuja un triángulo equilátero que tiene el mismo perímetro que el triángulo anterior, ¿cuánto mide cada lado del triángulo equilátero?

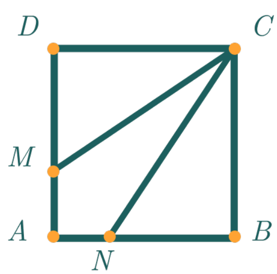
Problema 1.9. (2.^{a} OMMEB-Ver., P3). Marisol tiene 9 rectángulos iguales, con los que forma el rectángulo más grande que se muestra en la figura. Si el lado mayor de cada uno de los rectángulos pequeños mide $10\ \mathrm{cm}$, ¿cuál es el perímetro del rectángulo más grande?



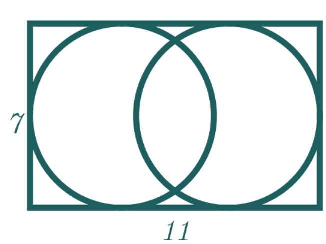
Problema 1.10. (2.^{a} OMMEB-Ver., P7). El diagrama muestra un rectángulo y una línea paralela a la base, en la que se han elegido dos puntos A y B, como se muestra en la figura. La suma de las áreas de los triángulos sombreados es $10\ \mathrm{cm}^2$. ¿Cuál es el área del rectángulo?



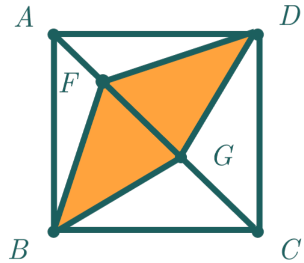
Problema 1.11. (2.^{a} OMMEB-Ver., P9). El cuadrado $ABCD$ tiene lados de longitud $3\ \mathrm{cm}$. Los puntos M y N están sobre AD y AB, respectivamente, de forma que CN y CM dividen al cuadrado en tres regiones de la misma área. ¿Cuál es la longitud de NB?



Problema 1.12. (2.^{a} OMMEB-Ver., P11). El diagrama muestra un rectángulo de dimensiones 7×11 que contiene dos círculos. Cada uno de los círculos toca al rectángulo en tres de sus lados. ¿Cuál es la distancia entre los centros de los círculos?

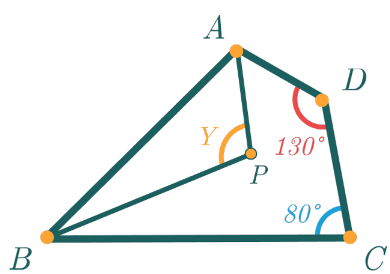


Problema 1.13. (5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E1, P5). En la figura tenemos un cuadrado $ABCD$ de lado 4. Si los puntos F y G en la diagonal AC cumplen que $4AF = AC$ y $FG = GC$, ¿cuánto vale el área del cuadrilátero $BGDF$?

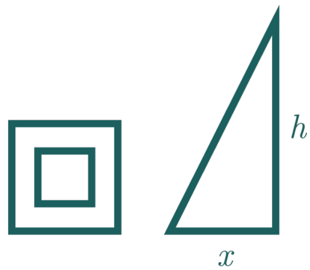


Problema 1.14. (5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P4). Un juego tiene muchas fichas iguales en forma de triángulo rectángulo. Si Eréndira junta cinco de esas fichas haciendo coincidir los ángulos agudos de mayor medida, forma una estrella, como se muestra en la figura. También, si junta cierto número de piezas, pero haciendo coincidir el ángulo agudo menor (en lugar del mayor), logra formar otra estrella. ¿Cuántas piezas usa para formar esa nueva estrella?

Problema 1.15. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E3, P4). Ulises dibuja el cuadrilátero $ABCD$ como en la figura, de tal manera que el ángulo interior en el vértice C mide $80°$ y el ángulo interior en el vértice D mide $130°$. Si las bisectrices de los ángulos interiores en los vértices A y B se cortan en P, determina el valor del ángulo Y marcado en la figura.



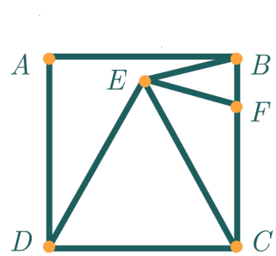
Problema 1.16. (5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E3, P6). En la siguiente figura el perímetro del cuadrado grande es igual a 32 cm, el cuadrado chico fue trazado de tal forma que cada uno de sus lados dista 2 cm de los lados correspondientes del cuadrado grande, tanto en los lados horizontales como en los verticales. Si el perímetro del cuadrado chico es igual a la altura h del triángulo rectángulo y el triángulo tiene la misma área que el cuadrado grande, ¿cuál es el valor de la base x del triángulo?



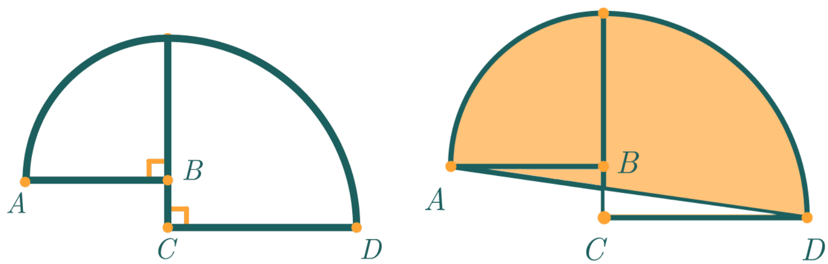
Problema 1.17. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E4, P2). Si cortamos un rectángulo por la mitad y ponemos una pieza encima de la otra obtenemos un cuadrado cuya área es 144 cm^2, ¿cuál es el perímetro del rectángulo con el que empezamos?

Problema 1.18. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E4, P4). En la figura se muestran dos hexágonos regulares. Los lados del hexágono grande miden el doble que los del hexágono pequeño. El hexágono pequeño tiene un área de 4 cm^2, ¿cuál es el área del hexágono grande?

Problema 1.19. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E4, P1). En la figura, $ABCD$ es un cuadrado y $\triangle DEC$ es un triángulo equilátero. Si F es un punto sobre BC, tal que $EB = EF$, ¿cuánto vale $\measuredangle CEF$?



Problema 1.20. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E4, P6). En la siguiente figura se muestran dos cuartos de circunferencia unidos por uno de sus lados rectos como se muestra en la figura. Si $AB = 3$ cm y $CD = 4$ cm, ¿cuánto vale el área sombreada?



Problema 1.21. (5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E4, P3). Dos círculos de radio 5 son tangentes exteriormente entre sí y tangentes internamente a un círculo de radio 13 en los puntos A y B, como en la figura. Considerando que podemos expresar a AB de la forma $AB = \frac{m}{n}$, en donde m y n son enteros positivos y primos relativos, encuentra el valor de $m+n$.

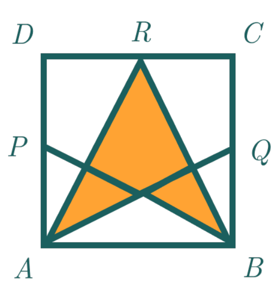
1.3. Problemas de geometría, nivel 2

Los problemas que se presentan a continuación formaron parte de los exámenes eliminatorios de la OMMEB en Veracruz. Para poder identificarlos se les ha asignado una notación como la siguiente: **5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E2, P3**; lo anterior significa que dicho ejercicio corresponde a la 5.^{a} OMMEB de Veracruz, del Nivel 2, del Examen selectivo 2, Problema 3.

El nivel 2 en la OMMEB refiere a sexto grado de primaria y primer año de secundaria.

1. 3. 1. Preguntas de opción múltiple

Problema 1.22. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E1, P5). En el diagrama muestra un cuadrado $ABCD$ con P, Q y R los puntos medios de los lados DA, BC y CD, respectivamente. ¿Qué fracción del cuadrado $ABCD$ está sombreada?



(a) $\frac{3}{4}$

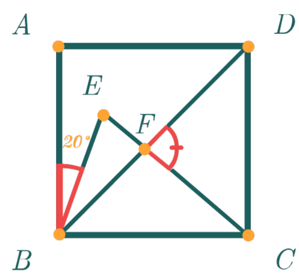
(b) $\frac{5}{8}$

(c) $\frac{1}{2}$

(d) $\frac{7}{16}$

(e) $\frac{3}{8}$

Problema 1.23. (4.^{a} OMMEB-Ver., N2, E1, P2). En la figura, $ABCD$ es un cuadrado, la medida del ángulo $\measuredangle EBA$ es $20°$ y $EC = BC$. ¿Cuál es la medida del ángulo $\measuredangle CFD$?



(a) $40°$

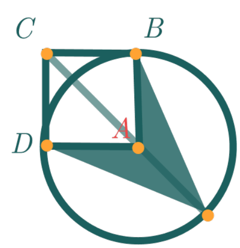
(b) $80°$

(c) $85°$

(d) $90°$

(e) Ninguna de las anteriores

Problema 1.24. (4.^{a} OMMEB-Ver., N2, E1, P4). Sean B y D dos puntos en la circunferencia de centro en A y radio igual a 1. Si el cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrado, ¿cuál es el valor del área de la flecha sombreada?



(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

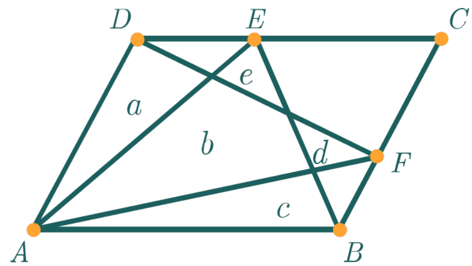
(b) $\sqrt{2}$

(c) $2\sqrt{2}$

(d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

(e) Ninguno de los anteriores

Problema 1.25. (4.^{a} OMMEB-Ver., N2, E1, P5). En el paralelogramo $ABCD$ de la figura E y F son puntos en los lados CD y BC, respectivamente. Expresa el valor del área e en términos de las áreas a, b, c y d, marcadas en la figura.



(a) $e = d$

(b) $e = a + d - c$

(c) $e = b - c$

(d) $e = b + d - a - c$

(e) Ninguno de los anteriores

Problema 1.26. (5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E1, P2). Considera el hexágono regular con vértices en los puntos A, B, C, D, E y F tal que sus lados miden 4, con centro en el punto O. Sea G la intersección de la prolongación del lado AF con la prolongación del lado ED, ¿cuál es el valor del área del cuadrilátero $AGEO$?

(a) $3\sqrt{3}$

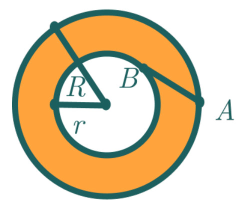
(b) $6\sqrt{3}$

(c) $12\sqrt{3}$

(d) $\frac{63\sqrt{3}}{4}$

(e) Ninguno de los anteriores

Problema 1.27. (4.^{a} OMMEB-Ver., N2, E2, P1). Considera dos circunferencias concéntricas de radios r y R, con $r < R$. Se toman dos puntos A y B en diferentes circunferencias, como en la figura, de tal manera que AB es tangente a la circunferencia de radio más pequeño. Si $AB = 4$, ¿cuánto vale el área sombreada?



(a) 4π

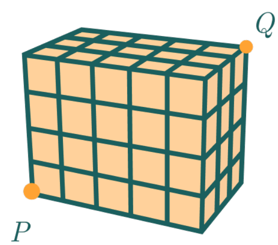
(b) 9π

(c) 16π

(d) 25π

(e) Ninguna de las anteriores

Problema 1.28. (5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E3, P1). El prisma de la figura está formado por 60 cubos idénticos de madera y tiene dimensiones de $3 \times 4 \times 5$. Una termita hace un túnel sobre la diagonal que va de P a Q. Esa diagonal no interseca los aristas de ningún cubo dentro del prisma. ¿Cuántos de los cubos del prisma atravesó la termita?



(a) 8

(b) 9

(c) 10

(d) 11

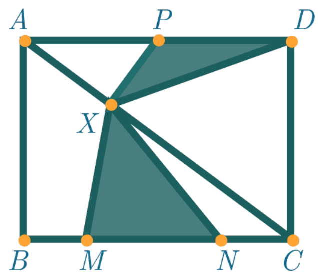
(e) Ninguna de las anteriores

1. 3. 2. Preguntas abiertas

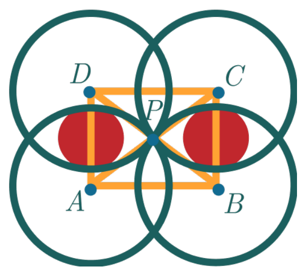
Problema 1.29. (4.^{a} OMMEB-Ver., N2, E2, P6). Sea $ABCDEF$ un hexágono equiángulo, con los vértices en dicho orden, tal que $AB = 9$, $CD = 6$, $DE = 12$ y $EF = 3$. Encuentra el valor del perímetro de $ABCDEF$.
Observación. Un hexágono es equiángulo si la medida de todos sus ángulos interiores es la misma.

Problema 1.30. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E3, P5). En la clase de matemáticas de Ulises, el maestro encarga de tarea calcular el perímetro de un triángulo rectángulo. Cuando Ulises llega a su casa se da cuenta que no anotó todos los datos del problema, pero recuerda que los lados del triángulo eran números enteros y que uno de ellos valía 7. ¿Cuánto vale el perímetro del triángulo que debe determinar Ulises?

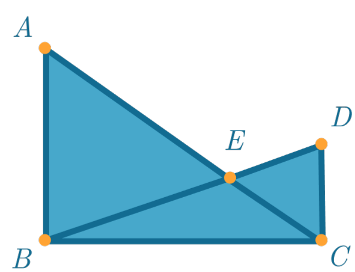
Problema 1.31. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E3, P7). El área del rectángulo $ABCD$ vale 1, los puntos M y N del lado BC son tales que $2MN = BC$ y P es el punto medio de AD. Ulises coloca un punto cualquiera X en la diagonal AC y sombrea los triángulos $\triangle MNX$ y $\triangle DPX$ como en en la figura. ¿Cuánto vale la suma de las áreas de los triángulos sombreados?



Problema 1.32. (4.^{a} OMMEB-Ver., N2, E3, P7). En la siguiente figura el rectángulo $ABCD$ tiene lados $AB = CD = 4$ y $BC = AD = 3$. Se dibujan circunferencias con centro en los vértices del rectángulo y que pasan por la intersección P de las diagonales del rectángulo. Luego, se dibujan las circunferencias rojas con centro en los lados del rectángulo y tangentes a dos de las circunferencias dibujadas inicialmente, como aparece en la figura. Encuentra la suma de las áreas de las circunferencias rojas.

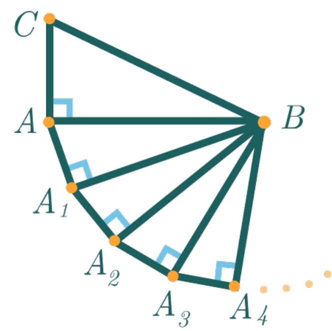


Problema 1.33. (5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E3, P6). En la siguiente figura sabemos que $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo, E es un punto en la hipotenusa AC, tal que $AE = 2EC$ y el punto D es la intersección de BE con la recta perpendicular a BC que pasa por C. Si el área del triángulo $\triangle BCE$ vale 2, calcula en área del pentágono azul $ABCDE$.



Problema 1.34. (4.^{a} OMMEB-Ver., N2, E4, P7). Dado un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con hipotenusa $BC = 2020$, se coloca el punto A_1 en el exterior de $\triangle ABC$ tal manera que se forma el triángulo rectángulo $\triangle A_1BA$ con hipotenusa AB. De manera semejante se van colocando los puntos $A_2, A_3, \ldots, A_{2020}$, de tal manera que se van formando triángulos rectángulos como en la figura. ¿Cuál es el valor de la siguiente suma?

$$(CA)^2 + (AA_1)^2 + (A_1A_2)^2 + (A_2A_3)^2 + \cdots + (A_{2019}A_{2020})^2 + (A_{2020}B)^2 .$$



1.4. Problemas de geometría, nivel 3

Los problemas que se presentan a continuación formaron parte de los exámenes eliminatorios de la OMMEB en Veracruz. Para poder identificarlos se les ha asignado una notación como la siguiente: **5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E2, P3**; lo anterior significa que dicho ejercicio corresponde a la 5.^{a} OMMEB de Veracruz, del Nivel 3, del Examen selectivo 2, Problema 3.

El nivel 3 en la OMMEB refiere al segundo año de secundaria.

1. 4. 1. Preguntas de opción múltiple

Problema 1.35. (5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E1, P1). Considera el hexágono regular con vértices en los puntos A, B, C, D, E y F, tal que sus lados miden x, con centro en el punto O. Sea G la intersección de la prolongación del lado AF con la prolongación del lado ED, ¿cuál es el valor del área del cuadrilátero $AGEO$?

(a) $\frac{3x\sqrt{3}}{4}$

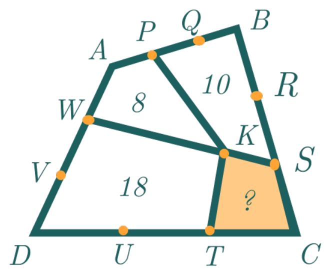
(b) $\frac{(4x^2-1)\sqrt{3}}{4}$

(c) $\frac{3x\sqrt{3}}{2}$

(d) $\frac{3x^2\sqrt{3}}{2}$

(e) Ninguno de los anteriores

Problema 1.36. (5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E2, P2). En la figura se muestra un cuadrilátero $ABCD$. Cada lado del cuadrilátero está dividido en partes iguales por los puntos P, Q, R, S, T, U, V y W. El punto K está en el interior del cuadrilátero y las áreas de los cuadriláteros $PBSK$, $APKW$ y $WKTD$ son como se indica en la figura. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $KSCT$?



(a) 4

(b) 5

(c) 6

(d) 7

(e) Ninguna de las anteriores

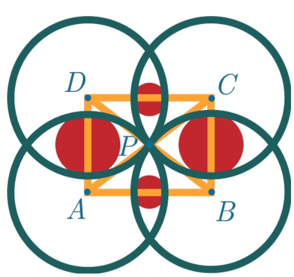
1. 4. 2. Preguntas abiertas

Problema 1.37. (4.^{a} OMMEB-Ver., N3, E2, P5). Sea $ABCDE$ un pentágono, con los vértices en ese orden. ¿Cuánto vale el área de $\triangle ADC$, si los lados del pentágono cumplen las siguientes condiciones?

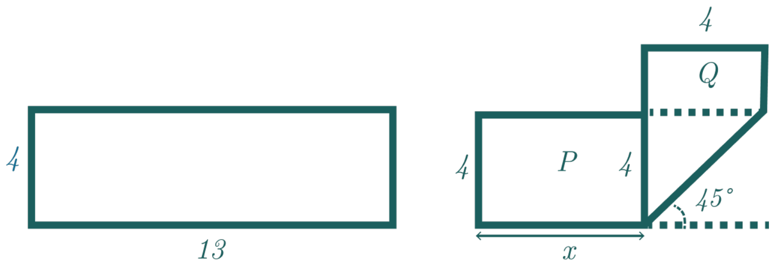
- $AB = CD = AE = 1$
- $\measuredangle ABC = \measuredangle AED = 90°$
- $BC = DE = \frac{1}{2}$

Problema 1.38. (3.^{a} OMMEB-Ver., N3, E3, P4). El perímetro de un triángulo rectángulo mide 20 y la altura desde el vértice en donde se encuentra el ángulo recto mide 4. ¿Cuánto vale el área del triángulo?

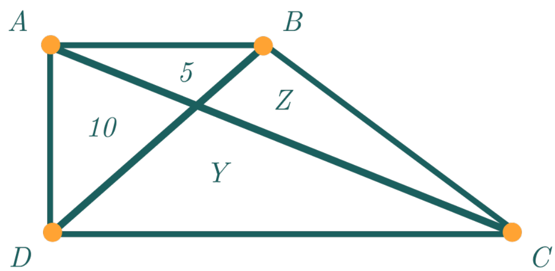
Problema 1.39. (4.^{a} OMMEB-Ver., N3, E3, P6). En la siguiente figura el rectángulo $ABCD$ tiene lados $AB = CD = 4$ y $BC = AD = 3$. Se dibujan circunferencias con centro en los vértices del rectángulo y que pasan por la intersección P de las diagonales del rectángulo. Luego, se dibujan las circunferencias rojas con centro en los lados del rectángulo y tangentes a dos de las circunferencias dibujadas inicialmente, como aparece en la figura. Encuentra la suma de las áreas de las circunferencias rojas.



Problema 1.40. (5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E3, P3). Una tira rectangular de papel con dimensiones 4×13 se dobla como se muestra en la figura. Al realizar el doblez se forman dos rectángulos P y Q, de manera que el área de P es el doble que la de Q. ¿Cuál es el valor de x?

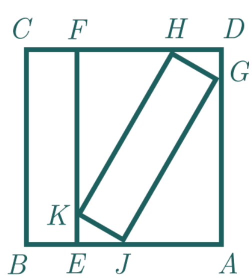


Problema 1.41. (3.^{a} OMMEB-Ver., N3, E4, P4). El cuadrilátero $ABCD$ tiene ángulos rectos solamente en los vértices A y D y está dividido en cuatro triángulos de áreas 10, 5, Y y Z, como se indica en la figura. ¿Cuál es el área del cuadrilátero?



Problema 1.42. (3.^{a} OMMEB-Ver., N3, E4, P8). Dos polígonos regulares de lado 1 están pegados por un lado. Uno de los dos polígonos tiene 15 lados y el otro tiene n lados. Etiquetamos con A y B a los vértices del lado que comparten ambos polígonos, con C al otro vértice que es adyacente a B sobre el polígono de 15 lados y con D al otro vértice que es adyacente a B en el otro polígono. Sabiendo que la distancia entre C y D es 1, ¿cuál es el valor de n?

Problema 1.43. (5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E4, P3). En la figura, $ABCD$ es un cuadrado de área igual a 1. Si los rectángulos $JKHG$ y $EBCF$ son congruentes, ¿cuál es el valor de BE?



1.5. Soluciones a los problemas de geometría

1. 5. 1. Nivel 1

Solución del problema 1.1. La respuesta es (e).

Salvo en la figura del (e), el área sombreada en todas las demás figuras está formada por triángulos que van de un lado del rectángulo al lado opuesto, así que en ellas el área sombreada es, a lo más, la mitad del área del rectángulo en el (d) es un poco menos de la mitad; en los (a), (b) y (c) es exactamente la mitad. En el (e), en vista de que una parte sombreada comprende un rectángulo y éste, junto con los triángulos, completan una base del rectángulo, el área sombreada es mayor.

Solución del problema 1.2. La respuesta es (a).

Observamos que el triángulo que está a la derecha de los triángulos que miden 1 cm de lado debe medir 2 cm de lado, y lo mismo los dos triángulos a la derecha de este. Entonces el triángulo grande tiene base 5 cm y, como es equilátero, su perímetro es $3 \times 5 = 15 \text{ cm}$.

Solución del problema 1.3. La respuesta es (c).

Como $\measuredangle AEP + \measuredangle PED = 180^\circ$, entonces

$$\measuredangle AEP = 180^\circ - \measuredangle PED = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Por otro lado, al ser AC diagonal del cuadrado $ABCD$, entonces $\measuredangle PAE = 45^\circ$. Como la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180°, concluimos que

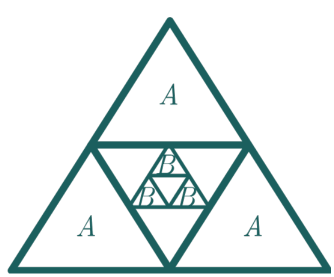
$$\measuredangle CPF = \measuredangle APE = 180^\circ - \measuredangle AEP - \measuredangle PAE = 180^\circ - 120^\circ - 45^\circ = 15^\circ.$$

Solución del problema 1.4. La respuesta es (b).

Podemos dividir el área de la estrella en sus puntas (cuatro triángulos) y el cuadrado central. Notemos que el área de cada uno de los triángulos son iguales, así que solo tenemos que obtener el área de un triángulo que está dada por $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} \text{ cm}^2$. Por otro lado el área del cuadrado es 1 cm^2. Por lo tanto el área total es $4(\frac{1}{2}) + 1 = 3 \text{ cm}^2$.

Solución del problema 1.5. La respuesta es (d).

Notemos que cuando unimos los puntos medios de los lados de un triángulo equilátero, se forman cuatro triángulos congruentes. Con lo que el área de cada uno de los cuatro triángulos es un cuarto del área del triángulo original.



El área (A) está dada por

$$(A) = \frac{1}{4} \times 3.$$

Análogamente obtenemos el área (B),

$$(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{64}.$$

Finalmente, el área sombreada está dada por

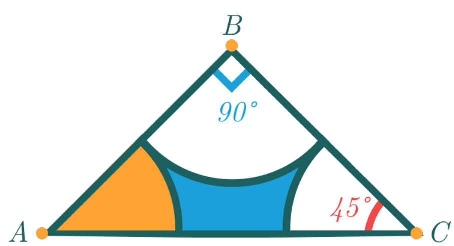
$$\frac{3}{4} + \frac{3}{64} = \frac{48+3}{64} = \frac{51}{64}.$$

Solución del problema 1.6. La respuesta es (e).

Cada lado del cuadrado mayor mide 4 cm, de donde la base de cada triángulo mide $4-1-1=2$ cm, al tiempo que su altura mide $4/2=2$ cm. Luego, el área de cada triángulo es $(2\times 2)/2 = 2$ cm^2, así que podemos obtener el área de la flor restándole al área del cuadrado mayor las áreas de los cuadrados más pequeños y la de los cuatro triángulos. Así, el área buscada es $16-4(1)-4(2)=4$ cm^2.

Solución del problema 1.7. La respuesta es (c).

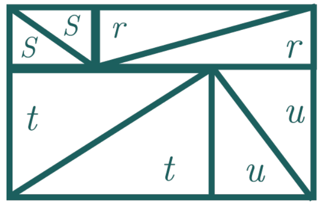
Como el ángulo en el vértice C es igual a $45°$ tenemos que el sector circular es $\frac{1}{8}$ de una circunferencia, entonces $\frac{\pi r^2}{8} = 2\pi$ de donde obtenemos que $r^2 = 16$, y por lo tanto $r = 4$. Ya que los sectores se tocan en el punto medio de los catetos tenemos que $BC = AB = 8$, de lo anterior obtenemos que el área del triángulo es igual a 32. Por otro lado, el área del sector con centro en B es igual a $\frac{\pi(4)^2}{4} = 4\pi$ y el que tiene centro en A es igual al área sombreada. Por lo tanto, el área que buscamos es $32-8\pi$.



Solución del problema 1.8. El perímetro del triángulo original es $6+10+11=27$, así que cada lado del triángulo equilátero mide $\frac{27}{3}=9$.

Solución del problema 1.9. El lado mayor del rectángulo grande mide 20 cm, que equivale a cinco veces la longitud del lado menor de cada rectángulo pequeño; así, el lado menor de cada rectángulo pequeño mide 4 cm. El perímetro del rectángulo grande mide $6\times 1+4\times 4=76$ cm.

Solución del problema 1.10. Se divide la figura como se muestra a continuación. Es fácil ver que la región coloreadas es igual a la región blanca (los triángulos marcados con las mismas letras son iguales).



Así, el área del rectángulo más grande es el doble que la suma de las áreas de los triángulos, es decir, es 20 cm^2.

Solución del problema 1.11. Observemos que la diagonal AC divide al cuadrilátero $AMCN$ en dos triángulos iguales. Así, el área del triángulo $\triangle ANC$ es la mitad del área de $\triangle NBC$. Como ambos triángulos tienen la misma altura desde C, AN debe medir la mitad de NB. Dado que $AB = 3$, entonces $NB = 2$.

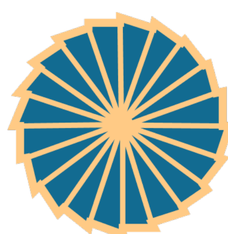
Solución del problema 1.12. Dado uno de los círculos, la distancia de su centro a cada uno de los lados del rectángulo que toca es la medida de su radio, que resulta ser $\frac{7}{2}$. Entonces, la distancia entre los centros mide $11 - 2(\frac{7}{2}) = 4$.

Solución del problema 1.13. La respuesta es 6.

Tenemos que el área $(ADC) = \frac{16}{2} = 8$, luego $FG = \frac{FC}{2} = \frac{3AC}{8}$. Después, si tomamos como base el lado de la diagonal, tenemos que los triángulos $\triangle ADC$ y $\triangle DFG$ tienen la misma altura, luego $(DFG) = \frac{3(ADC)}{8} = \frac{3(8)}{8} = 3$. Para obtener el área del cuadrilátero multiplicamos por 2 el área de un triángulo, por lo tanto, resulta que $(BGDF) = 2(3) = 6$.

Solución del problema 1.14. La respuesta es 20 piezas.

En cada triángulo, el más grande de los ángulos agudos mide $360^{\circ}/5 = 72^{\circ}$, así que el más pequeño mide $90^{\circ} - 72^{\circ} = 18^{\circ}$. La estrella tendrá $360^{\circ}/18^{\circ} = 20$ triángulos, y quedará como se muestra en la figura.



Solución del problema 1.15. La respuesta es $Y = 105^\circ$.

Como $ABCD$ es un cuadrilátero tenemos que la suma interna de sus ángulos es igual a 360°, es decir $\measuredangle ABC + \measuredangle DAB + 130^\circ + 80^\circ = 360^\circ$, luego $\measuredangle ABC + \measuredangle DAB = 150^\circ$. Ya que BP y DP son bisectrices de los ángulos en los vértices B y A, de lo anterior tenemos que $\frac{\measuredangle ABC}{2} + \frac{\measuredangle DAB}{2} = 75^\circ$.

Ahora, en $\triangle ABP$ sabemos que $\measuredangle BPA + \frac{\measuredangle ABC}{2} + \frac{\measuredangle DAB}{2} = 180^\circ$, por lo que $\measuredangle BPA = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$, que es el ángulo que buscábamos.

Solución del problema 1.16. La respuesta es $x = 8$ cm.

Notemos que cada uno de los lados del cuadrado grande mide 8 cm, en consecuencia, cada lado del cuadrado chico mide 4 cm y su perímetro es 16 cm. Así, la altura del triángulo es igual a 16 cm. Por otro lado, observemos que como el área de triángulo es igual a la del cuadrado grande, entonces es igual a 64 cm^2. Considerando esto, tenemos que el área del triángulo es

$$64 = \frac{x \times 16}{2}.$$

Por lo tanto el valor de x es igual a 8 cm.

Solución del problema 1.17. La respuesta es 60 cm.

El cuadrado debe tener lado 12 cm, así que el rectángulo debe tener un lado de 6 cm y otro de 24 cm, por lo que su perímetro es $2(6) + 2(24) = 60$ cm.

Solución del problema 1.18. La respuesta es 16 cm^2.

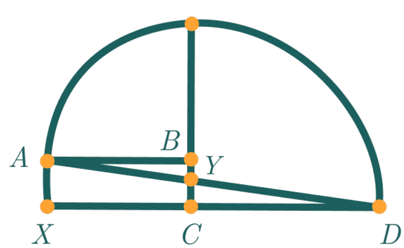
Podemos dividir el hexágono más grande en 24 triángulos iguales, de donde tenemos que el hexágono menor queda cubierto por seis de estos triángulos. Luego, el área del hexágono más grande es $4 \times 4 = 16\text{ cm}^2$.

Solución del problema 1.19. Como $\triangle DEC$ es equilátero, $\measuredangle DCE = 60°$, así que $\measuredangle ECF = 90° - 60° = 30°$. Notemos que como $ABCD$ es un cuadrado, $BC = DC$ y como $\triangle DEC$ es equilátero, $DC = EC$, por lo que $\triangle BCE$ es isósceles con $\measuredangle BEC = \measuredangle EBC = \frac{180°-30°}{2} = 75°$.

Como $\triangle BEF$ es isósceles, $\measuredangle BFE = 75°$ y observemos que $\measuredangle BFE + \measuredangle EFC = 180°$, así que $\measuredangle EFC = 105°$. Por lo que, en $\triangle EFC$,

$$\measuredangle CEF = 180° - \measuredangle EFC - \measuredangle ECF = 180° - 105° - 30° = 45°.$$

Solución del problema 1.20. Sea X un punto tal que AX es perpendicular a CD y sea Y la intersección de BC con AD.



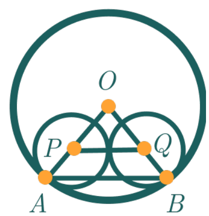
Observemos que el área de toda la figura consiste en la suma de las áreas de los cuartos de circunferencia más la suma del área del rectángulo $ABCX$. Esto es

$$A_T = \frac{\pi}{4} \times 3^2 + \frac{\pi}{4} \times 4^2 + 3 \times 1 = \frac{25}{4} \times \pi + 3.$$

Así que el área sombreada se obtiene restando el área total menos el área de $\triangle AXD$.

$$\frac{25}{4} \times \pi + 3 - \frac{7}{2} = \frac{25}{4} \times \pi - \frac{1}{2}.$$

Solución del problema 1.21. Sea O el centro de la circunferencias de radio 13, además sean P y Q los centros de las circunferencias que pasan por los puntos A y B, respectivamente.



Luego, por el criterio AA (ya que PQ es paralelo a AB) tenemos que $\triangle OPQ$ es semejante a $\triangle OAB$ y por lo tanto,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AO}{OP}.$$

Ya que el radio de las circunferencias tangentes es 5, tenemos que $AP = 5$, por lo que $OP = AO - AP = 13 - 5 = 8$; además $PQ = 2AP = 10$, con lo que de la ecuación anterior tenemos que

$$AB = \frac{PQ \cdot AO}{OP} = \frac{10 \cdot 13}{8} = \frac{65}{4} = \frac{m}{n}.$$

De donde $m + n = 69$.

1. 5. 2. Nivel 2

Solución del problema 1.22. La respuesta es (e).

Sea S el punto medio de AB y O el punto de intersección de AQ con BP. Por simetría, O está sobre RS. Además, $\triangle AOS$ y $\triangle AQB$ son semejantes y sus lados están en razón $1:2$. Digamos que el cuadrado tiene lado 4; entonces QB mide 2 y OS mide 1. Ahora calculemos el área de los triángulos no sombreados. El triángulo $\triangle AOB$ tiene área $\frac{4 \cdot 1}{2} = 2$; además $\triangle ARD$ y $\triangle BRC$ tienen área $\frac{4 \cdot 2}{2} = 4$. Entonces el área de la parte sombreada es $16 - 2 - 4 - 4 = 6$ y la fracción buscada es $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Otra solución. El área sombreada es igual al área de $\triangle ABR$ menos el área de $\triangle AOB$, donde O es la intersección de AQ y BP. Además $\triangle ABR$ tiene la mitad del área del cuadrado. Por otra parte, el rectángulo $ABQP$ también tiene área la mitad del área del cuadrado puesto que P y Q son los puntos medios de AD y BC, respectivamente. Ahora, las diagonales del rectángulo $ABQP$ lo dividen en cuatro triángulos de igual área, por lo que el área de $\triangle ABO$ es $1/4$ del área del $ABQP$ y, por lo tanto $1/8$ del área del cuadrado. Finalmente, el área sombreada es $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

Solución del problema 1.23. La respuesta es (c).

Como $\measuredangle ABD = 45°$, entonces $\measuredangle EBF = 45° - 20° = 25°$. Por otro lado, los ángulos iguales del triángulo isósceles $\triangle BCE$ miden

$$\measuredangle EBC = \measuredangle BEC = \measuredangle ABC - \measuredangle ABE = 90° - 20° = 70°.$$

Como la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es $180°$, concluimos que

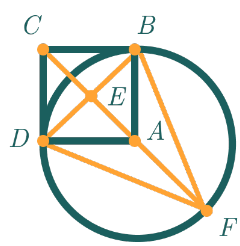
$$\measuredangle CFD = \measuredangle BFE = 180° - \measuredangle EBF - \measuredangle BEC = 180° - 25° - 70° = 85°.$$

Solución del problema 1.24. La respuesta es (a).

Aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo $\triangle ABD$, tenemos que $BD = \sqrt{2}$, ya que $AB = AD = 1$. Lo anterior implica que la altura de $\triangle AFB$ es $EB = \frac{\sqrt{2}}{2}$, por lo que su área es

$$(\triangle AFB) = \frac{1}{2} AF \cdot EB = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Concluimos que el área de la región sombreada es $(ADFB) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Solución del problema 1.25. La respuesta es (b).

Observemos que si h es la altura del paralelogramo $ABCD$ respecto a la base AB, entonces podemos expresar al área de $\triangle ABE$ como

$$(\triangle ABE) = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2}(ABCD).$$

De manera semejante es posible ver que $(\triangle ADF) = \frac{1}{2}(ABCD)$. Como $(\triangle ABE) = e + b + c$ y $(\triangle ADE) = a + b + d$, entonces

$$e + b + c = a + b + d.$$

De ahí se obtiene que $e = a + d - c$.

Solución del problema 1.26. La respuesta es (c).

Como los ángulos internos de un hexágono regular miden $120°$, entonces $\measuredangle FEG = \measuredangle EFG = 60°$, por lo que $\triangle FGE$ es un triángulo equilátero de lado 4. Por otro lado, $\triangle AGD$ también es equilátero de lado 8, ya que $\measuredangle GAD = \measuredangle GDA = 60°$. Como la altura de $\triangle AGD$ es $\sqrt{(8)^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$, entonces

$$(AGEO) = (\triangle AGD) - (\triangle EOD) = 16\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$$

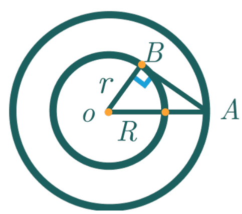
Solución del problema 1.27. La respuesta es (c).

Sea O el centro de las circunferencias. Como AB es tangente a la circunferencia pequeña, entonces el segmento que une el centro de dicha circunferencia y OB es perpendicular a AB, utilizando el Teorema de Pitágoras en $\triangle ABO$ obtenemos que $R^2 = r^2 + 4^2$. De donde

$$R^2 - r^2 = 4^2 = 16.$$

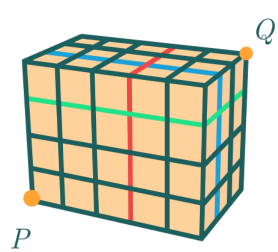
Ahora notemos que el área sombreada S es igual la resta del área de las dos circunferencias

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = 16\pi.$$

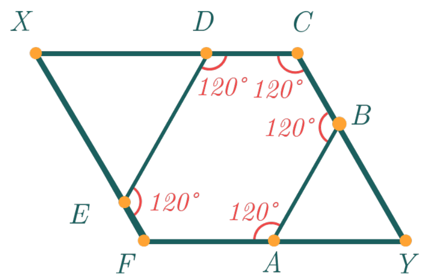


Solución del problema 1.28. La respuesta es (c).

Para llegar de P a Q la termita debe atravesar dos "paredes" hacia atrás, cuatro "paredes" hacia la derecha y tres "paredes" hacia arriba (en la figura se ha resaltado una "pared" en cada una de las direcciones). Cada vez que la termita cruza una pared, cambia de cubo, así que en total pasará por $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ cubos.



Solución del problema 1.29. Sean $a = BC$ y $b = AF$. Como $ABCDEF$ es un hexágono equiángulo, todos sus ángulos interiores miden $120°$. Sean X y Y las intersecciones de CD con EF y de BC con AF, respectivamente.



En $\triangle DXE$ cada uno de sus ángulos interiores miden $60°$, ya que dos de ellos están sobre la misma línea de un ángulo de $120°$. Por lo que $\triangle DXE$ es equilátero con lados iguales a 12. De la misma manera $\triangle ABY$ es equilátero con lados iguales a 9. Luego el cuadrilátero $CXFY$ tiene sus ángulos opuestos iguales, por lo que es un paralelogramo, de aquí que sus lados opuestos son iguales. Por lo tanto, $a + 9 = 15$ y $b + 9 = 18$, de lo cual se sigue que $a = 6$ y $b = 9$. Concluimos que el perímetro del hexágono es $12 + 3 + 9 + 6 + 9 + 6 = 45$.

Solución del problema 1.30. Sean a, b, c los lados del triángulo rectángulo con hipotenusa c. Ahora, hay dos casos:

- Caso 1. Si $c \neq 7$ por el Teorema de Pitágoras tenemos que $a^2 + 7^2 = c^2$, de donde $(c+a)(c-a) = 49$. Como $c+a > c-a$, entonces $c-a = 1$ y $c+a = 49$. Al resolver el sistema de ecuaciones llegamos a que $c = 25$ y $a = 24$. Por lo que el perímetro del triángulo es $25 + 24 + 7 = 56$.

- Caso 2. Si $c = 7$, por el Teorema de Pitágoras tenemos que $a^2 + b^2 = c^2$. Al sustituir los valores de $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ podemos ver que los valores de b no son enteros, por lo que este caso no es posible.

Solución del problema 1.31. Sea b la longitud del lado AD y a la longitud de AB. Sea x la longitud de la altura desde X del $\triangle PXD$ y y la longitud de la altura desde X del $\triangle XMN$. Luego,

$$(\triangle PXD) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}b\right)x,$$
$$(\triangle MXN) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}b\right)y.$$

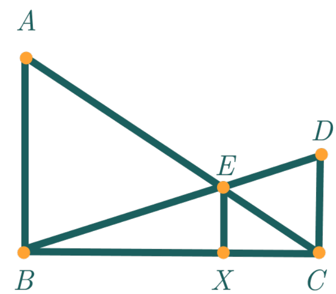
La suma de los triángulos sombreados es $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}b)(x+y) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}b)a = \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}$.

Solución del problema 1.32. Sea a el diámetro de una circunferencia roja (veamos que, como es simétrica la figura, solo nos enfocaremos a analizar una circunferencia roja). Luego sea x la distancia del punto de tangencia de la circunferencia grande con la circunferencia roja. Notemos que el radio de las circunferencias grandes mide la mitad de la diagonal del rectángulo, por lo que, de acuerdo con el Teorema de Pitágoras sabemos que mide $\frac{\sqrt{3^2+4^2}}{2} = \frac{5}{2}$. Luego, tenemos que $x + a = \frac{5}{2}$ y que $2x + a = 3$, por lo que $x = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$ de donde $a = 2$. De ahí que el radio de la circunferencia roja es 1 y el área sombreada es 2π.

Solución del problema 1.33. La respuesta es 7.

Sea X el pie de E en BC. Como AB, EX y CD son paralelas y, además, $EC = \frac{1}{3}AC$, entonces $BC = 3XC = \frac{3}{2}BX$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} AB &= 3EX, \\ CD &= \frac{3}{2}EX. \end{aligned}$$



Como $2 = (\triangle BCE) = \frac{1}{2}(BC)(EX)$, entonces $(BC)(EX) = 4$. Luego,

$$\begin{aligned} (\triangle ABC) &= \frac{1}{2}(BC)(AB) = \frac{3}{2}(BC)(EX) = 6, \\ (\triangle BCD) &= \frac{1}{2}(BC)(CD) = \frac{3}{4}(BC)(EX) = 3. \end{aligned}$$

Finalmente tenemos:

$$(ABCDE) = (\triangle ABC) + (\triangle BCD) - (\triangle BCE) = 6 + 3 - 2 = 7.$$

Otra solución. Después de observar que $AE = 2EC$ y $BE = 2ED$, entonces tenemos que $(\triangle ABE) = 2(\triangle BCE)$ y $(\triangle CDE) = \frac{1}{2}(\triangle BCE)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (ABCDE) &= (\triangle ABE) + (\triangle BCE) + (\triangle CDE) \\ &= \left(2 + 1 + \frac{1}{2}\right)(\triangle BCE) \\ &= 7. \end{aligned}$$

Solución del problema 1.34. Como todos los triángulos son rectángulos, en particular, podemos utilizar el Teorema de Pitágoras para el último triángulo $\triangle A_{2019}A_{2020}B$, obteniendo que

$$(A_{2019}A_{2020})^2 + (A_{2020}B)^2 = (A_{2019}B)^2 .$$

En general, para cualquier $n = 2, \ldots, 2020$, tenemos

$$(A_{n-1}A_n)^2 + (A_nB)^2 = (A_{n-1}B)^2 .$$

Por lo anterior, si S es el valor de la suma buscada, tenemos que

$$\begin{aligned} S &= (CA)^2 + (AA_1)^2 + (A_1A_2)^2 + (A_2A_3)^2 + \cdots + (A_{2019}A_{2020})^2 + (A_{2020}B)^2 \\ &= (CA)^2 + (AA_1)^2 + (A_1B)^2 \\ &= (CA)^2 + (AB)^2 \\ &= (BC)^2 \\ &= (2020)^2 . \end{aligned}$$

1. 5. 3. Nivel 3

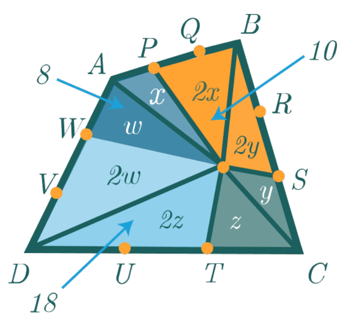
Solución del problema 1.35. La respuesta es (e).

Como los ángulos internos de un hexágono regular miden $120°$, entonces $\measuredangle FEG = \measuredangle EFG = 60°$, por lo que $\triangle FGE$ es un triángulo equilátero de lado x. Por otro lado, $\triangle AGD$ también es equilátero de lado $2x$, ya que $\measuredangle GAD = \measuredangle GDA = 60°$. Como la altura de $\triangle AGD$ es $\sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = a\sqrt{3}$, entonces

$$(AGEO) = (\triangle AGD) - (\triangle EOD) = x^2\sqrt{3} - \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{4}.$$

Solución del problema 1.36. La respuesta es (c).

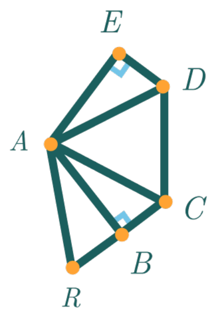
Unamos todos los puntos A, B, C y D con K. Etiquetemos los vértices como se muestra en la figura y tracemos las líneas que los unen con K. Como los triángulos $\triangle AKP$ y $\triangle PKB$ tienen la misma altura y sus bases cumplen que $PB = 2AP$, tenemos que el área del triángulo $\triangle PKB$ es el doble que el área del triángulo $\triangle AKP$; llamemos x a esta última. De forma similar etiquetemos las áreas de la figura con las letras y, z y w, como se muestra.



Tenemos entonces que $x + w = 8$, $x + y = (2x + 2y)/2 = 10/2 = 5$, $w + z = (2w + 2z)/2 = 18/2 = 9$, de manera que el área buscada es

$$y + z = (w + z) + (x + y) - (x + w) = 9 + 5 - 8 = 6.$$

Solución del problema 1.37. Sobre la extensión de BC y a la izquierda de B, elegimos un punto R tal que $RB = ED = \frac{1}{2}$.



Ya que $AB = AE$, $\measuredangle ABR = \measuredangle AED = 90°$ y $RB = ED$, por el criterio LAL, los triángulos $\triangle AED$ y $\triangle ABR$ son congruentes, por lo que $AR = AD$.

Obsérvese ahora que $AD = AR$, $AC = AC$ y $DC = CR = 1$, de esta manera por el criterio LLL, $\triangle ADC$ es congruente a $\triangle ARC$. Finalmente,

$$(\triangle ADC) = (\triangle ARC) = 2(\triangle ABC) = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

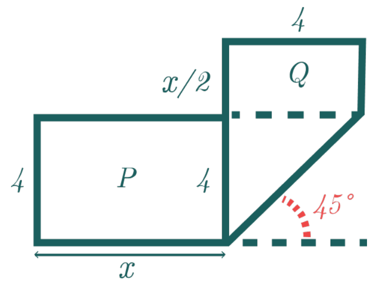
Solución del problema 1.38. Sean a, b, c los lados del triángulo con hipotenusa c. Por el enunciado del problema sabemos que $a + b + c = 20$, de esto determinamos que $(a+bc)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac = 20^2$. Luego, por el Teorema de Pitágoras tenemos que $a^2 + b^2 = c^2$; además, los triángulos que se forman por la altura son semejantes entre sí por el criterio AA, así que tenemos que $\frac{a}{4} = \frac{c}{b}$, de donde $ab = 4c$.

Al sustituir $ab = 4c$ y $a^2 + b^2 = c^2$ en la primera expresión se sigue que $2c^2 + 8c + 2c(a + b) = 400$, como $a + b = 20 - c$ podemos sustituir esta expresión en la anteriormente obtenida con lo que $48c = 400$ y por lo tanto $c = \frac{25}{3}$. En conclusión el área del triángulo es $\frac{4c}{2} = 2\left(\frac{25}{3}\right) = \frac{50}{3}$.

Solución del problema 1.39. Sea a el diámetro de una circunferencia roja con centro en un lado que mide 3 y b el diámetro de la circunferencia roja con centro sobre el lado que mide 4 (veamos que como es simétrica la figura, solo nos enfocaremos a analizar una circunferencia roja de cada lado distinto). Luego sea x la distancia del punto de tangencia de la circunferencia grande con la circunferencia roja con diámetro a y sea y la distancia del punto de tangencia de la circunferencia grande con la circunferencia roja con diámetro b. Notemos que el radio de las circunferencias grandes son iguales y miden la mitad de la diagonal del rectángulo, por lo que, con base en el Teorema de Pitágoras, sabemos que mide $\frac{\sqrt{3^2+4^2}}{2} = \frac{5}{2}$. Luego, tenemos que $x + a = \frac{5}{2}$ y que $2x + a = 3$, por lo que $x = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$, de donde $a = 2$. Luego, $y + b = \frac{5}{2}$ y $2y + b = 4$, de ahí que $y = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$, de donde $b = 1$. Por lo tanto, el radio de la circunferencia roja con diámetro a es 1 y la de diámetro b es $\frac{1}{2}$. Así el área sombreada es $2(\pi + \frac{\pi}{4}) = \frac{5\pi}{2}$.

Solución del problema 1.40. La respuesta es 6.

Como ambos rectángulos P y Q tienen un lado que mide 4, y el área de P es el doble que la de Q, entonces el otro lado de Q mide $x/2$. Entonces tenemos que $x + 4 + x/2 = 13$, de donde $2x + 8 + x = 26$, y así $3x = 18$ y $x = 6$.



Solución del problema 1.41. La respuesta es 45.

Sea O el punto de intersección de AC y DB. Llamemos x y y a las alturas desde O de $\triangle AOB$ y $\triangle DOC$, con bases AB y DC, respectivamente. Luego,

$$\frac{AB \cdot x}{2} = 5 = \frac{15}{3} = \frac{AB(y+x)}{6},$$

de donde $y + x = 3x$, por lo que $y = 2x$. Ahora, $\triangle ABO$ y $\triangle CDO$ son semejantes, por lo que $DC = 2AB$, y llegamos a que el área de $\triangle BDC$ es

$$\frac{2AB \cdot 3x}{2} = 6\frac{AB \cdot x}{2} = 30.$$

Por lo tanto, el área del cuadrilátero es 45.

Solución del problema 1.42. Sea O el centro del polígono de 15 lados y P el centro del polígono de n lados. El triángulo $\triangle AOB$ es congruente a cualquier triángulo que se forme al tomar como vértices a O y a los dos extremos de un lado del polígono de 15 lados, como hay 15 triángulos de esos alrededor de O tenemos que $\measuredangle AOB$ mide $\frac{360°}{15} = 24°$. Esos triángulos son congruentes y así $\measuredangle ABC$ (dentro del polígono de 15 lados) es igual a la suma de $\measuredangle ABO$ y $\measuredangle BAO$, que es igual a $180° - 24° = 156°$. Por otro lado, $\triangle BCD$ es equilátero y entonces el $\measuredangle ABD$ (dentro del polígono de n lados) mide $360° - 60° - 156° = 144°$. Como $\measuredangle PAB + \measuredangle PBA = \measuredangle ABD$, tenemos que $\measuredangle APB = 180° - 144° = 36°$, así que debe haber $\frac{360}{36} = 10$ triángulos congruentes a $\triangle APB$ alrededor de P. Por lo tanto, $n = 10$.

Solución del problema 1.43. Sea $x = BE = JK = GH$ y sea $y = AJ$, notemos que $\measuredangle GJA = 180° - \measuredangle EJK - 90° = 90° - \measuredangle EJK$, por lo que tenemos que $\triangle GJA \sim \triangle JKE$, de forma análoga están las siguientes relaciones de semejanza $\triangle GJA \sim \triangle JKE \sim \triangle KHF \sim \triangle HGD$. Observemos que $JK = HG$ y $JG = KH$, así que $\triangle GJA \cong \triangle KHF$, así como que $\triangle JKE \cong \triangle HGD$. Por las anteriores semejanzas y congruencias tenemos que $GD = xy$ y $JE = x \cdot GA = x\sqrt{1-y^2}$.

Ahora, ya que $JE + JA = EA$ y $GA + GD = AD$, llegamos a que

$$x\sqrt{1-y^2} + y = 1 - x,$$
$$\sqrt{1-y^2} + xy = 1,$$

o bien

$$x(\sqrt{1-y^2} + 1) = 1 - y,$$
$$xy = 1 - \sqrt{1-y^2}.$$

Sustituimos la segunda ecuación en la primera y obtenemos que

$$\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}(\sqrt{1-y^2}+1)=1-y.$$

De donde $y=\frac{1}{2}$ y, por lo tanto, $x=2-\sqrt{3}$.

Otra solución. Sea $DG=EK=y$ y sea $BE=JK=GH=x$, luego, $AG=1-y$ y $EJ=\sqrt{x^2-y^2}$. Ya que $\triangle EJK\sim\triangle AGJ$, tenemos que

$$\frac{1}{1-y}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

De esta ecuación obtenemos que

$$\sqrt{x^2-y^2}=x(1-y).$$

De donde obtenemos al elevar al cuadrado

$$x^2-y^2=x^2(1-2y+y^2)=x^2-x^2(2y-y^2),$$

con lo que

$$y^2=x^2(2y-y^2).$$

De la semejanza anteriormente mencionada tenemos una segunda y tercera ecuación

$$\begin{aligned}2y-y^2&=\frac{y^2}{x^2},\\ x^2&=\frac{y^2}{2y-y^2}.\end{aligned}$$

Ya que $AB=1$, tenemos que nuestra segunda ecuación es

$$x+\sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{1-(1-y)^2}=1.$$

Luego, de la primera ecuación tenemos que

$$x+x(1-y)+\sqrt{1-(1-y)^2}=1,$$

es decir,

$$x+x(1-y)+\sqrt{2y-y^2}=1,$$

y de la segunda ecuación obtenemos que

$$x+x(1-y)+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}}=1.$$

Con lo que

$$x(2-y)+\frac{y}{x}=1,$$

es decir,

$$x^2(2-y)+y=x.$$

Y por la tercera ecuación

$$\frac{(2-y)y^2}{2y-y^2}+y=x.$$

Que de forma simplificada es que $x = 2y$. Así que nuestro problema se reduce en manejar triángulos rectángulos con ángulos de $30°$ y $60°$; por otro lado, ya que $AD = AG + GD = \frac{\sqrt{3}}{2} + y$, llegamos a que $y = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $x = 2 - \sqrt{3}$.

Capítulo 2
Aritmética

2.1. Definiciones y resultados básicos

En esta sección presentaremos las definiciones y propiedades básicas de aritmética que utilizaremos para resolver los problemas relacionados con este tema. Si se desea profundizar en los tópicos abordados aquí, se pueden consultar los libros de Aguilar Arteaga *et al*. (2015), Illanes (2017) y Niven y Zuckerman (1976).

2. 1. 1. Sobre números y sus propiedades

Además de los números naturales, los que nos sirven para contar:

$$1, 2, 3, 4, \ldots,$$

tenemos a los números enteros (los naturales, sus negativos y el cero):

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots,$$

a los números racionales (cocientes de enteros o expresiones con parte decimal periódica):

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{5}{4}, 0.25, -0.3333\ldots,$$

y otros números más que se utilizan en matemáticas, como

$$\sqrt{2}, \pi, \ldots$$

Todos ellos se trabajan con las mismas propiedades, aunque se operan de distintas maneras, según su forma. La aritmética es la rama de las matemáticas que estudia los números y las operaciones que se hacen con ellos, tales como la suma, la resta, la multiplicación y la división, es decir, las cuatro operaciones básicas. A continuación se presentan propiedades que nos ayudan a operar con los números.

La aritmética tiene propiedades básicas como las siguientes:

1. Las operaciones entre paréntesis se desarrollan primero.
2. Si no hay paréntesis, la multiplicación y la división se realizan antes de la suma y resta.

3. La suma y resta se operan en su orden de aparición.
4. La suma se puede realizar en cualquier orden y es conmutativa: para cualesquiera números reales a, b, c se tiene que $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a + b = b + a$.
5. La multiplicación se puede realizar en cualquier orden y es conmutativa: para cualesquiera números reales a, b, c se tiene que $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ y $a \times b = b \times a$.

Estas propiedades nos permiten realizar las operaciones en el siguiente ejemplo:

$$7 \times 5 + 6 - \frac{12}{4} = 35 + 6 - 3 = 38.$$

La primera igualdad se tiene debido a la propiedad 2, que dice que se debe realizar primero las multiplicaciones y divisiones antes que las sumas y restas. La segunda igualdad se sigue de la propiedad 3, haciendo las operaciones indicadas: a 35 sumar 6 y luego restar 3.

Para el siguiente ejemplo:

$$9 + 33 \div (-7 + 4) + 5 = 9 + 33 \div (-3) + 5 = 9 - 11 + 5 = 3.$$

La primera igualdad se tiene debido a la propiedad 1, que pide hacer primero las operaciones entre paréntesis. La segunda igualdad se sigue de la propiedad 2, que dice que se debe realizar primero las divisiones antes que las sumas y restas. La tercera igualdad se sigue de la propiedad 3, haciendo las operaciones indicadas: a 9 restar 11 y luego sumar 5.

En diversos problemas estaremos interesados en los dígitos de un número, como el número 2345 que tiene cuatro dígitos; comenzando a la derecha son el dígito de las unidades, de las decenas, de las centenas y de las unidades de millar. En general, si queremos representar un número n, por ejemplo, de dos dígitos, lo podemos escribir con dos letras, digamos z y w:

$$n = zw,$$

donde w representa el dígito de las unidades y z representa el dígito de las decenas, además z no puede ser cero para que el número n sea un número de dos dígitos. Por ejemplo, 35 es un número de dos dígitos mientras que 07 no lo es.

► Ejemplo

Encuentra todos los números de tres dígitos cuya suma de sus dígitos sea 25.
Primeramente, representaremos a los números buscados por abc, donde a, b y c son dígitos y a no es cero. Lo más pequeño que puede ser a es uno, pero b y c pueden valer máximo nueve cada uno y llegaríamos a lo más a 19, por lo que a no puede valer uno; de igual manera, a no puede valer dos, ni tres, ni cuatro, ni cinco, ni seis. Si $a = 7$, entonces $b = 9$ y $c = 9$, con lo que tenemos al número 799. Si $a = 8$, entonces b y c deben sumar 17, por lo que pueden ser 8 y 9, con lo que obtenemos los dos números: 889, 898. Si $a = 9$, entonces b y c deben sumar 16, por lo que pueden ser 9 y 7, o bien 8 y 8, con lo que obtenemos los tres números: 997, 979, 988.

En resumen, los números buscados son:

$$799, 889, 898, 997, 979 \text{ y } 988.$$

Cuando tenemos una colección de números, una manera de dar una medida que los represente es calcular su promedio, el cual es la suma de ellos dividido entre el total de números. El promedio de los números x_1, x_2, ..., x_n es:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

► Ejemplo

Encuentra todos los enteros positivos de tres dígitos distintos entre sí y ninguno de ellos cero, cada uno menor que cinco, tales que el promedio de los tres dígitos es igual al promedio del dígito mayor y del dígito menor.

Vamos a representar a los números buscados por abc, donde a, b y c pueden ser 1, 2, 3 o 4. Dada la simetría en el promedio, podemos suponer que $a < b < c$ y, al final, rotar todas las soluciones que encontremos.

Una de las hipótesis nos dice que

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{a+c}{2}.$$

De donde

$$a + c = 2b.$$

Ahora analizamos por casos:

- $a = 1$, en este caso c debe ser impar. Dado que deben ser dígitos distintos solo podemos tener $c = 3$, de donde $b = 2$. Por lo que encontramos solo al número 123.

- $a = 2$, en este caso c debe ser par. Dado que deben ser dígitos distintos solo podemos tener $c = 4$, de donde $b = 3$. Por lo que encontramos solo al número 234.

- $a = 3$ y $a = 4$ no son posibles, dado que estamos suponiendo que a es el más pequeño de los tres.

Recordemos que, por la simetría del problema, debemos rotar los dígitos de las soluciones encontradas, de donde concluimos que los enteros positivos buscados son: 123, 132, 213, 231, 312, 321, 234, 243, 324, 342, 423 y 432.

2. 1. 2. Divisibilidad

El concepto de divisibilidad se trabaja para los números naturales y enteros, aunque varias de sus propiedades vienen de las análogas en los números reales. Sin embargo, muchas propiedades son inherentes a los enteros y eso nos ayuda a entenderlos mejor. La terminología que seguiremos es la usada en Niven y Zuckerman (1976).

Definición 7. El entero positivo b **divide** a otro entero a, denotado por $b \mid a$, si existe un entero c tal que $a = b \times c = bc$. También se dirá que a es un **múltiplo** de b.

Así, por ejemplo, 2 divide a 48, porque $48 = 2\times 24$; 3 divide a 27, porque $27 = 3\times 9$; 1 divide a cualquier entero, pues dado n entero $n = 1 \times n$. Cualquier entero distinto de cero divide a cero, pues dado un entero arbitrario n, se puede escribir $0 = n \times 0$.

Algunas propiedades de la divisibilidad se enuncian a continuación.

Propiedades de la divisibilidad

1. Si a y b son distintos de cero y $a \mid b$, entonces $|a| \leq |b|$. En particular, si $a, b > 0$ y $a \mid b$, entonces $a \leq b$.
2. Si $a > b \geq 0$ y $a \mid b$, entonces $b = 0$.
3. Si $a \mid b$ y $b \mid a$, entonces $|a| = |b|$.
4. Si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid bc$.
5. Si $a \mid b$ y $b \mid c$, entonces $a \mid c$.
6. Si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces para cualesquiera t y r enteros se tiene que $a \mid tb + rc$.

En la última de las propiedades, a la expresión $tb + rc$ se le llama **combinación lineal** de b y c. Estas propiedades nos ayudan a determinar divisibilidad de manera más sencilla. Por ejemplo, si queremos saber para qué valor de x (entero positivo de un dígito) se tiene que

$$3 \mid 47x + 359,$$

podemos observar que $3 \mid 45$, por lo que $3 \mid 45x$, luego,

$$3 \mid 47x + 359 - 45x = 2x + 359;$$

también se tiene que $3 \mid 357$, por lo que

$$3 \mid 2x + 359 - 357 = 2x + 2 = 2(x + 1);$$

de donde $3 \mid x + 1$. Así que x puede ser 2, 5 u 8.

En general, un número n con k dígitos puede representarse como sigue:

$$n = a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1, \text{ donde } a_k \neq 0.$$

Otra manera de fijarnos en los dígitos de un número entero es a través de potencias de 10. Por ejemplo, podemos escribir

$$2405 = 2 \times 1000 + 4 \times 100 + 0 \times 10 + 5 = 2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 0 \times 10 + 5 \times 10^0.$$

En general, un número n con k dígitos puede representarse en potencias de 10 como sigue:

$$n = a_k a_{k-1} \cdots a_1 = a_k \times 10^{k-1} + a_{k-1} \times 10^{k-2} + \cdots + a_2 \times 10 + a_1.$$

En matemáticas muchas veces conviene descomponer en partes más pequeñas o simples los objetos que pretendemos estudiar; en nuestro caso hay un concepto importante que nos permite descomponer a los números naturales, el concepto de “primo” que se define a continuación.

Definición 8. El entero positivo p es un **número primo** si es mayor que 1 y sus únicos divisores son 1 y p. Un entero mayor que uno que no es primo se llama **número compuesto**.

Teorema 4 (fundamental de la aritmética)**.** Cualquier entero positivo m diferente de 1 se descompone de manera única como producto de primos:

$$m = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k.$$

Si en el teorema fundamental de la aritmética juntamos los factores primos que aparecen repetidos, como por ejemplo $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$, podemos representar la descomposición en potencia de primos:

$$m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}.$$

Esta última expresión nos permite contar el número de divisores positivos que tiene el entero m, dado que podemos recorrer cada exponente de 0 a α_i. Es decir que m tendrá

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$$

divisores positivos. En nuestro ejemplo del número $12 = 2^2 \cdot 3$, observamos que 12 tiene $(2+1)(1+1) = 6$ divisores positivos que son: 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

► Ejemplos

1. Prueba que un entero positivo es divisible entre 9 si y solo si la suma de los dígitos del número es divisible entre 9.

   En efecto, escribimos al número como

   $$n = a_k a_{k-1} \cdots a_1 = a_k \times 10^{k-1} + a_{k-1} \times 10^{k-2} + \cdots + a_2 \times 10 + a_1.$$

   Ahora, observamos que para cada entero positivo m se tiene

   $$10^m = 10 \cdots 00 = 99 \cdots 99 + 1,$$

   por lo que escribimos:

   $$n = a_k \times (99 \cdots 99 + 1) + a_{k-1} \times (99 \cdots 99 + 1) + \cdots + a_2 \times (9 + 1) + a_1.$$

   Hacemos las multiplicaciones en cada término para obtener:

   $$n = a_k \times 99 \cdots 9 + a_{k-1} \times 99 \cdots 99 + \cdots + a_2 \times 9 + (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_2 + a_1).$$

Factorizando el 9 en los primeros términos:

$$n = 9(a_k \times 11\cdots 1 + a_{k-1} \times 11\cdots 11 + \cdots + a_2 \times 1) \\ + (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_2 + a_1).$$

De donde, 9 divide a n si y solo si 9 divide a $a_k + a_{k-1} + \cdots + a_2 + a_1$, es decir a la suma de los dígitos de n.

2. ¿Cuántos divisores positivos tiene $10!$?

   Por lo visto anteriormente, lo que se debe hacer es desarrollar el factorial y escribirlo como potencia de primos:

   $$10! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 2\cdot 3\cdot 2^2\cdot 5\cdot 2\cdot 3\cdot 7\cdot 2^3\cdot 3^2\cdot 2\cdot 5 = 2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7.$$

   De donde obtenemos que $10!$ tiene $(8+1)(4+1)(2+1)(1+1) = 270$ divisores positivos.

Definición 9. Diremos que un entero n es un **cuadrado**, si es igual al cuadrado de otro entero, es decir existe un entero a tal que $n = a^2$.

¿Qué pasa en término de números primos para los cuadrados? En la expresión de arriba vimos que n se puede escribir en potencia de primos como sigue:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}.$$

Si n es un cuadrado, entonces cada factor primo debe aparecer un número par de veces, es decir cada α_i debe ser par, así

$$a = p_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \cdot p_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \cdots p_r^{\frac{\alpha_r}{2}}.$$

Cuando en la divisibilidad tenemos un número primo se tienen propiedades interesantes como en el siguiente resultado.

Lema 1 (de Euclides)**.** Si p es un número primo y $p \mid ab$, entonces $p \mid a$ o $p \mid b$.

El siguiente es conocido como algoritmo de la división y es el que desarrollamos cuando realizamos la división de dos números con la casita; por ejemplo, cuando dividimos 25 entre 8 nos da 3 como cociente y nos sobra 1 como residuo, lo cual nos permite escribir la igualdad: $25 = 8 \times 3 + 1$

Teorema 5 (algoritmo de la división)**.** Sean b un entero positivo y a cualquier entero. Entonces hay enteros únicos q y r tales que $a = bq + r$, donde r es un entero no negativo y menor que b. El número entero a se llama **dividendo**, b es el **divisor**, q el **cociente** y r el **residuo**.

El algoritmo de la división trae consigo propiedades interesantes que permiten describir a conveniencia los números. Como ejemplos tenemos que

1. Al dividir un entero entre 2 tendrá residuo 0, o bien 1.

2. Cualquier número par se puede escribir de la forma $2n$, con n entero.
3. Cualquier número impar se puede escribir de la forma $2n + 1$, con n entero.
4. Al dividir un entero entre 3 tendrá residuo 0, 1, o bien 2, es decir que lo podemos escribir en alguna de las siguientes formas: $3q$, $3q + 1$, o bien $3q + 2$.

Un criterio universal que siempre funciona para saber si un entero es o no divisible entre otro entero dado, es el de realizar la división y revisar su residuo. Si el residuo es 0, entonces es divisible; de lo contrario, no lo es.

Criterios especiales de divisibilidad

- Criterio del 1: todos los enteros son divisibles entre 1; el 1 divide a todos los enteros. En cambio, ningún número entero positivo (excepto el 1) divide al 1.
- Criterio del 0: ningún entero es divisible entre 0; el 0 no divide a ningún entero. En cambio, todos los números enteros dividen a 0.
- Última cifra: 2, 5, 10. Un entero es divisible entre 2, 5 o 10, si la última cifra del entero es divisible entre 2, 5 o 10, respectivamente. El 2 divide a las cifras 0, 2, 4, 6, 8. Un entero divisible entre 2 se llama **número par**. El 5 divide a las cifras 0 y 5. El 10 únicamente divide a la cifra 0.
- Últimas cifras: 4, 25, 100. Un número entero es divisible entre 4, 25 o 100 si el número formado por las últimas dos cifras es divisible entre 4, 25 o 100, respectivamente.
- Criterio del 3 y 9: un número es divisible entre 3 o 9 si el número resultado de la suma de sus cifras es divisible entre 3 o 9, respectivamente.
- Criterio del 11: un número es divisible entre 11 si el resultado de la suma y resta alternada de los dígitos del número es divisible entre 11.

► Ejemplos

1. El número 765234 es divisible entre 9, pues $7 + 6 + 5 + 2 + 3 + 4 = 27$, que es un múltiplo de 9.
2. El número 765234 no es divisible entre 4, dado que 4 no divide a 34.
3. El número 765275 es divisible entre 25, pues 75 es divisible entre 25.
4. El número 765234 no es divisible entre 11, pues $7 - 6 + 5 - 2 + 3 - 4 = 3$ no es un múltiplo de 11.
5. El número 465234 sí es múltiplo de 11, pues $4 - 6 + 5 - 2 + 3 - 4 = 0$, y 0 es múltiplo de 11.

6. El número de cinco dígitos $d456d$ es divisible entre 18. Si d es un dígito, ¿cuál es su valor?

   Para que un número sea divisible entre 18, este debe ser divisible entre 2 y entre 9, por lo que el dígito d debe ser par y no cero. Además, la suma de los dígitos del número debe ser divisible entre 9, es decir, debemos tener que
   $$9 \mid d+4+5+6+d = 2d+15,$$
   y como $9 \mid 9$, tenemos que
   $$9 \mid 2d+15-9 = 2d+6.$$
   De los valores posibles para d solo cumple la condición de divisibilidad $d=6$.

2. 1. 3. Divisor más grande y múltiplo más pequeño

Definición 10. El **mínimo común múltiplo** de los enteros positivos a y b es el entero positivo más pequeño, que es múltiplo tanto de a como de b. Se denota $\mathrm{mcm}(a,b)$, o bien $[a,b]$.

El procedimiento para calcular el mínimo común múltiplo de dos enteros a y b es hallar la descomposición en potencia de primos, entonces el mínimo común múltiplo será el producto de los primos que hay en las dos descomposiciones con las potencias más grandes que aparezcan (si en uno aparece un factor primo y en el otro no aparece, sí debe considerarse en la construcción). Por ejemplo $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, por lo que
$$[360, 84] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520.$$

Propiedades del mínimo común múltiplo

1. Si m es un múltiplo común de a y b, entonces $[a,b] \mid m$.
2. Si p y q son primos distintos, entonces $[p,q] = pq$.
3. $[a, na] = na$.
4. Si $n \mid a$ y $n \mid b$, entonces $[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}] = \frac{[a,b]}{n}$.
5. $[ma, mb] = m[a,b]$.
6. Si $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ y $b = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$, es la descomposición en números primos de a y b, entonces
   $$[a,b] = p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdots p_k^{\max\{\alpha_k,\beta_k\}}.$$

Definición 11. El **máximo común divisor** de los enteros distintos de cero a y b es el mayor de sus divisores comunes. Se denotará $\mathrm{mcd}(a,b)$, o bien (a,b).

El procedimiento para calcular el máximo común divisor de dos enteros a y b es hallar la descomposición en potencia de primos y el máximo común divisor será el producto de los primos que aparecen en las dos descomposiciones con las potencias más pequeñas que aparezcan (si un factor aparece en uno y no en el otro número, entonces no se toma en cuenta. Por ejemplo $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, por lo que $(360, 84) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Definición 12. Dos enteros a y b distintos de cero se dicen **primos relativos**, si $(a, b) = 1$.

Propiedades del máximo común divisor

1. Si a y b no son cero, entonces cualquier divisor común de a y de b también divide a (a, b).
2. Si $a \mid b$, entonces $(a, b) =\mid a \mid$.
3. Si $d = (a, b)$, escribimos $a = da'$ y $b = db'$, entonces $(a', b') = 1$.
4. $(a, b) = (a, b - a)$.
5. Si $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ y $b = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$, es la descomposición en números primos de a y b, entonces
$$(a, b) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \cdots p_k^{\min\{\alpha_k, \beta_k\}}.$$
6. $[a, b](a, b) = ab$.

El siguiente resultado nos da una relación entre el algoritmo de la división y el máximo común divisor, además en la prueba se usan las propiedades de divisibilidad.

Proposición 1. Sean a y b dos enteros distintos de cero, suponer que b no divide a a, por tanto el algoritmo de la división deja un residuo distinto de cero. Si $a = bq + r$, entonces $(a, b) = (b, r)$.

Demostración. Si d es un divisor común de a y de b, dada la relación $a = bq + r$ se tendrá que $d \mid r$; por lo que $(a, b) \mid (b, r)$.

Al revés, si d es un divisor común de b y de r, dada la relación $a = bq + r$ se tendrá que $d \mid a$; por lo que $(b, r) \mid (a, b)$.

Como los máximos comunes divisores son positivos, se tiene que $(a, b) = (b, r)$.

► Ejemplo

En este ejemplo vamos a encontrar el máximo común divisor de 360 y 84 utilizando el algoritmo de la división.

Primeramente hacemos la división de casita y encontramos que $360 = 84(4) + 24$, por lo que $(360, 84) = (84, 24)$; luego hacemos la división de 84 entre 24 y obtenemos $84 = 24(3) + 12$, por lo que $(84, 24) = (24, 12)$. Ahora, como 12 divide a 24, se tiene que $(24, 12) = 12$. Es decir que $(360, 84) = 12$.

2.2. Preguntas de aritmética, nivel 1

Los problemas que se presentan a continuación formaron parte de los exámenes eliminatorios de la OMMEB en Veracruz. Para poder identificarlos se les ha asignado una notación como la siguiente: **5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P3**; lo anterior significa que dicho ejercicio corresponde a la 5.^{a} OMMEB de Veracruz, del Nivel 1, del Examen selectivo 2, Problema 3. En el caso de los problemas correspondientes a la 2.^{a} OMMEB se omite el número de examen y el nivel, puesto que se utilizó solo un examen selectivo para todos los niveles.

El nivel 1 en la OMMEB refiere a cuarto y quinto grados de primaria.

2. 2. 1. Preguntas de opción múltiple

Problema 2.1. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E1, P1). Mariana quiere cambiar un foco fundido en su casa. El foco está colgado a 24 centímetros por abajo del techo y el techo está a una altura de 2.5 metros por arriba del piso; Mariana mide 1.45 metros y puede alcanzar objetos que estén a 45 centímetros por arriba de su cabeza estirando sus brazos. Si parada en un banco ella puede alcanzar de manera justa el foco, ¿qué altura tiene el banco?

(a) 34 cm

(b) 36 cm

(c) 38 cm

(d) 39 cm

(e) Ninguna de las anteriores

Problema 2.2. (5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E1, P1). La piñata de la fiesta de Marcos está conformada por un pentágono regular y cinco triángulos equiláteros como picos sobre cada lado del pentágono. Si el perímetro del pentágono mide 120 cm, ¿cuánto mide el perímetro de toda la piñata?

(a) 240 cm

(b) 360 cm

(c) 480 cm

(d) 600 cm

(e) Ninguna de las anteriores

Problema 2.3. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P3). Un rectángulo tiene el doble de largo que de ancho, y sus lados miden una cantidad entera de metros. ¿Cuál de las siguientes opciones no puede ser igual al área del rectángulo?

(a) 32 metros cuadrados

(b) 92 metros cuadrados

(c) 98 metros cuadrados

(d) 162 metros cuadrados

(e) Ninguna de las anteriores

Problema 2.4. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P2). El grillo Pepe se encuentra saltando en una escalera muy larga. Por cada salto que da cambia de un escalón a otro y siempre se mueve en el orden siguiente: salta tres veces hacia adelante y una vez hacia atrás, y luego repite ese mismo orden de saltos. Los escalones están coloreados de la siguiente manera: rojo, azul, amarillo, verde y anaranjado; después se repiten los colores en el mismo orden. Si inicialmente Pepe está en un escalón rojo, ¿de qué color es el escalón en el que queda después de 2020 saltos?

(a) Rojo

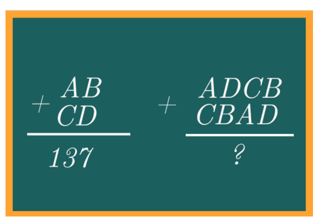
(b) Azul

(c) Amarillo

(d) Verde

(e) Anaranjado

Problema 2.5. (5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P2). Un estudiante sumó correctamente los dos números de dos dígitos que están a la izquierda del pizarrón y obtuvo como respuesta 137. ¿Qué respuesta obtendrá sumando los dos números de cuatro dígitos que están a la derecha del pizarrón?



(a) 13737

(b) 13837

(c) 14747

(d) 23737

(e) Ninguna de las anteriores

Problema 2.6. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E3, P2). Si la multiplicación de dos números enteros positivos, que son múltiplos de siete y están formados por dos dígitos, es igual a 7007, ¿cuánto vale su suma?

(a) 168

(b) 49

(c) 143

(d) 160

(e) Ninguna de las anteriores

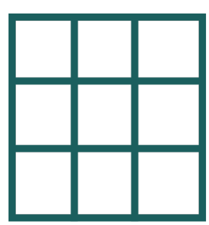
2. 2. 2. Preguntas abiertas

Problema 2.7. (2.^{a} OMMEB-Ver., P4). Mónica multiplicó correctamente dos números de dos dígitos en una hoja de papel. Luego puso unas calcomanías encima de tres dígitos, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la suma de los tres dígitos que quedaron tapados?

$$\blacksquare\,3 \quad \times \quad 2\,\blacksquare \quad = \quad 3\,\blacksquare\,2$$

Problema 2.8. (2.^{a} OMMEB-Ver., P12). María escribió en su cuaderno una lista de números primos menores que 100. Se dio cuenta que al hacerlo escribió exactamente una vez cada uno de los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, y ningún otro. ¿Cuál de los siguientes números primos 2, 5, 31, 41, 53, debe estar forzosamente en su lista?

Problema 2.9. (2.^{a} OMMEB-Ver., P13). Víctor escribió los números enteros del 1 al 9, uno en cada cuadro de la cuadrícula. Luego, calculó la suma de los enteros por cada uno de los renglones y de las columnas. Cinco de los resultados que obtuvo son 13, 14, 15, 16 y 17, en algún orden. ¿Cuál es el sexto resultado?



Problema 2.10. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E1, P7). En su entrenamiento Diana, Carlos y Francisco corren en una pista circular; Diana tarda 10 minutos en dar una vuelta completa a la pista, mientras que Carlos y Francisco tardan 12 y 8 minutos, respectivamente. Si salen simultáneamente y el entrenamiento se acaba cuando vuelven a pasar los tres por la línea de meta al mismo tiempo, ¿cuánto tiempo en minutos dura el entrenamiento?

Problema 2.11. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E1, P8). El gato de Fátima cada mañana come un tercio del contenido de una lata de comida para gato y un cuarto cada tarde. Antes de alimentarlo el lunes por la mañana, Fátima abrió una caja que contenía 6 latas de comida. ¿En qué día de la semana el gato terminó de comer toda la comida que tenían las 6 latas de la caja?

Problema 2.12. (5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E1, P6). ¿Cuántos enteros positivos divisibles por 10 son cuadrados perfectos menores que 2021?

Observación. Se dice que un número entero positivo n es un cuadrado perfecto si es el resultado de elevar al cuadrado algún número entero positivo, es decir, $n = m^2 = m \times m$, con m entero positivo. Por ejemplo, 16 es un cuadrado perfecto, puesto que $16 = 4^2 = 4 \times 4$.

Problema 2.13. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P4). Calcula el valor del producto siguiente:

$$\left(1+\frac{2}{1}\right) \times \left(1+\frac{2}{3}\right) \times \left(1+\frac{2}{5}\right) \times \left(1+\frac{2}{7}\right) \times \left(1+\frac{2}{9}\right) \times \left(1+\frac{2}{11}\right)$$

Problema 2.14. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P6). Si la suma de cuatro números positivos impares consecutivos es igual a 24, ¿cuál es el producto de esos cuatro números?

Problema 2.15. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P7). En una imprenta forman un libro de 500 páginas con 125 hojas, colocando una encima de otra y doblándolas todas juntas por la mitad. Al momento de encuadernar uno de los libros, por error no se le puso la hoja que tenía la página con el número 100. ¿Cuáles otras páginas no aparecieron en ese libro?

Problema 2.16. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E3, P1). Hay tres bolsas, la primera con canicas amarillas, la segunda con canicas rojas y la tercera con canicas verdes. Ulises saca una canica de la primera bolsa, dos canicas de la segunda bolsa, tres canicas de la tercera bolsa, cuatro canicas de la primera bolsa y así sucesivamente hasta pasar cinco veces por cada bolsa. Si al final en la primera bolsa hay una canica amarilla, en la segunda bolsa hay dos canicas rojas y en la tercera bolsa hay tres canicas verdes, ¿cuántas canicas rojas había inicialmente?

Problema 2.17. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E3, P3). Ulises tiene siete dados. Toma uno y pega los otros seis a este, de manera que coincide el número de puntos de las caras pegadas. ¿Cuánto suman los puntos que quedan en la superficie visible?

Problema 2.18. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E3, P4). Encuentra el dígito de las unidades de la suma siguiente:

$$22^1 + 22^2 + 22^3 + 22^4 + 22^5 + 22^6 + 22^7 + 22^8 + 22^9 + 22^{10}.$$

Observación. El símbolo n^k significa elevar el número n al exponente k, es decir,

$$n^k = \underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{k \text{ veces}}.$$

Problema 2.19. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E3, P7). En un pizarrón se escriben los números múltiplos de 3, desde 3 hasta 63:

$$3, 6, 9, \ldots, 63.$$

Una persona va cambiando los números de la siguiente forma:

- Elige arbitrariamente tres números del pizarrón y los borra.
- Posteriormente escribe el resultado de sumar los tres números escogidos y le resta 2 unidades.

La persona continúa con el proceso anterior hasta que queda solo un número.

(a) ¿El número que queda al final depende de la forma en que se escojan los números?

(b) ¿Siempre queda el mismo número? En caso de que así sea, ¿cuál es el número que queda al final?, ¿por qué?

Problema 2.20. (5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E3, P4). Considera los números M y N cuyos valores están dados por

$$\begin{aligned} M &= \left(2-\frac{1}{2}\right)\left(6-\frac{2}{3}\right)\left(12-\frac{3}{4}\right)\left(20-\frac{4}{5}\right)\left(30-\frac{5}{6}\right)\left(42-\frac{6}{7}\right), \\ N &= \left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{3}\right)\left(4-\frac{1}{4}\right)\left(5-\frac{1}{5}\right)\left(6-\frac{1}{6}\right)\left(7-\frac{1}{7}\right). \end{aligned}$$

¿Cuál es el valor de $\frac{M-N}{N}$?

Problema 2.21. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E4, P7). Seis hermanos comienzan a ducharse para ir a la escuela, a partir de las 7 de la mañana. En la casa hay dos baños en total y nunca hay más de una persona en el mismo baño. Cada uno de los hermanos estuvo en el baño durante 8, 10, 12, 17, 21 y 22 minutos, respectivamente. ¿A qué hora fue lo más temprano que pudieron terminar de bañarse los seis hermanos?

Problema 2.22. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E4, P8). Varios piratas se reparten un cofre con monedas de oro, de manera que a cada uno le toca la misma cantidad. Si hubiera cuatro piratas menos, a cada quien le tocarían 10 monedas más. Si hubiera 50 monedas menos, a cada pirata le tocarían 5 monedas menos que en el reparto original. ¿Cuántas monedas se repartieron en total?

Problema 2.23. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E4, P2). Considera la sucesión de números enteros

$$3, 8, 5, 6, 7, 4, \ldots$$

Cada término de la sucesión, a partir del cuarto, se obtiene de los tres anteriores, sumando los dos primeros y restando el tercero, por ejemplo, $6 = 3+8-5$, $7 = 8+5-6$, $4 = 5+6-7$, etc. ¿Cuál es el término que está en la posición 2020?
Observación. Los términos de la sucesión pueden tomar valores positivos, negativos o cero.

2.3. Preguntas de aritmética, nivel 2

Los problemas que se presentan a continuación formaron parte de los exámenes eliminatorios de la OMMEB en Veracruz. Para poder identificarlos se les ha asignado una notación como la siguiente: **5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E2, P3**; lo anterior significa que dicho ejercicio corresponde a la 5.^{a} OMMEB de Veracruz, del Nivel 2, del Examen selectivo 2, Problema 3.

El nivel 2 en la OMMEB refiere a sexto grado de primaria y primer año de secundaria.

2. 3. 1. Preguntas de opción múltiple

Problema 2.24. (4.^{a} OMMEB-Ver., N2, E1, P1). Antes de participar en un concurso de matemáticas, 110 estudiantes fueron a una papelería a comprar un lápiz para cada uno y entre todos pagaron la cantidad de $\$1, X20.00$. ¿Cuál es el valor del dígito X que falta, si aportaron cantidades iguales?

(a) $X = 1$

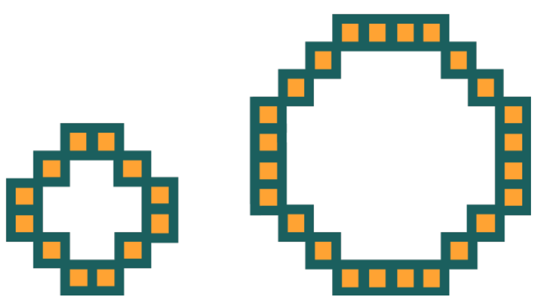
(b) $X = 2$

(c) $X = 3$

(d) $X = 4$

(e) Ninguno de los anteriores

Problema 2.25. (4.^{a} OMMEB-Ver., N2, E1, P3). Daniela tiene una cantidad muy grande de cubos que le dieron sus papás como regalo de cumpleaños y con los cuales forma octágonos como los que aparecen en las figuras. En el primero, los lados horizontal y vertical están formados por dos cubos cada uno y las diagonales por un solo cubo; este octágono tiene un tamaño de altura 6. A partir del anterior, va agregando cada vez dos cubos más en los lados horizontal y vertical, y uno más en cada diagonal para obtener octágonos de mayor tamaño de altura; por ejemplo, el segundo octágono que tiene 10 de altura. ¿Cuántos cubos necesitará Daniela para formar un octágono cuyo tamaño de altura sea 2020?



(a) 4040 cubos

(b) 6054 cubos

(c) 8076 cubos

(d) 8080 cubos

(e) Ninguno de los anteriores

Problema 2.26. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E2, P2). ¿Cuántos números de tres cifras hay, si cada una de las cifras debe ser diferente y el producto de las tres cifras es 56?.

(a) 6 números

(b) 2 números

(c) 18 números

(d) 19 números

(e) Ninguno de los anteriores

Problema 2.27. (5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E2, P3). A cada una de las letras a, b, c, d y e se le asigna el valor de un dígito, de forma que el número X de seis dígitos escrito como $X = \overline{2abcde}$ cumple que, al multiplicarlo por 3, se obtiene el número Z de seis dígitos $Z = \overline{abcde2}$. ¿Cuál es el valor de $a + b + c + d + e$?

(a) 24

(b) 25

(c) 30

(d) 33

(e) Ninguno de los anteriores

2. 3. 2. Preguntas abiertas

Problema 2.28. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E1, P10). Los siete dígitos del número telefónico $\overline{aaabbbb}$ se suman y se obtiene el número de dos dígitos $\overline{ab}$. ¿Cuánto vale $a + b$?

Problema 2.29. (5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E1, P5). ¿Cuántos números enteros positivos de cinco cifras cumplen que no son múltiplos de 5 y que, al eliminar las últimas dos cifras, queda un número que es un cubo perfecto?
Observación. Se dice que un número entero positivo n es un cubo perfecto si es el resultado de elevar al cubo algún número entero positivo, es decir,

$$n = m^3 = m \times m \times m,$$

con m entero positivo. Por ejemplo, 64 es un cubo perfecto, puesto que $64 = 4^3 = 4 \times 4 \times 4$.

Problema 2.30. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E2, P5). ¿Cuántos ceros hay al final del número que se obtiene de multiplicar 500 veces el número 500?

$$\underbrace{500 \times 500 \times \cdots \times 500}_{500 \text{ veces}}$$

Problema 2.31. (4.^{a} OMMEB-Ver., N2, E2, P5). Usando cuatro dígitos a, b, c y d diferentes de cero se forman los números de dos cifras ab, bc, cd y da. Si $ab+bc+cd+da = 154$, ¿cuánto vale la suma $a+b+c+d$?
Observación. Se denota a un número de dos cifras por zw, donde z y w son dígitos, con z distinto de cero; por ejemplo, 35 es un número de dos cifras pero 07 no lo es.

Problema 2.32. (5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E2, P6). Rafa perdió la contraseña de su computadora, solo recuerda que es un número de nueve dígitos, de la forma $X = \overline{aaabbbccc}$, tal que si sumaba todos sus dígitos se formaba el número Y de dos dígitos; de la forma $Y = \overline{de}$, tal que d es el promedio de a y b, mientras que e es el promedio de a y c. Encuentra la cantidad de posibles contraseñas que cumplen estas condiciones.

Problema 2.33. (5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E2, P7). ¿Cuánto vale la suma de cuatro números consecutivos, si el valor del producto de ellos es $1413720 = 2^3\times3^3\times5\times7\times11\times17$?

Problema 2.34. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E3, P3). ¿Cuántos números de cinco dígitos son divisibles por 3 y tienen a 26 como sus dos últimos dígitos?

Problema 2.35. (5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E3, P3). En un cuaderno Lourdes escribió seis números enteros positivos, tales que el producto de los dos números más pequeños es 8, el producto de los dos más grandes es 72 y el producto los dos números que no son ni los más pequeños ni los más grandes es 30. ¿Cuánto vale la suma de todos los números que Lourdes escribió en el cuaderno?

Problema 2.36. (5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E3, P4). Considera los números M y N cuyos valores están dados por

$$\begin{aligned} M &= \left(2-\frac{1}{2}\right)\left(6-\frac{2}{3}\right)\left(12-\frac{3}{4}\right)\left(20-\frac{4}{5}\right)\left(30-\frac{5}{6}\right)\left(42-\frac{6}{7}\right), \\ N &= \left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{3}\right)\left(4-\frac{1}{4}\right)\left(5-\frac{1}{5}\right)\left(6-\frac{1}{6}\right)\left(7-\frac{1}{7}\right). \end{aligned}$$

¿Cuál es el valor de $M-N$?

Problema 2.37. (5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E3, P5). ¿Cuántos números de cuatro cifras son divisibles por 12, tales que cumplen que todos sus dígitos son pares y diferentes?

Problema 2.38. (5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E3, P7). En la siguiente suma cada dígito está representado por una letra con $A, D \neq 0$, ¿cuáles son los dígitos que representan las letras B y C, respectivamente?

$$\begin{array}{ccccc} & A & B & C & D \\ + & D & B & C & A \\ \hline E & E & E & E & E \end{array}$$

Problema 2.39. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E4, P3). Héctor escribió, sin repetir, los números del 1 al 9 en las celdas de una cuadrícula de 3×3, de forma que cada celda contiene un dígito; escribió los números 1, 2, 3 y 4 como se muestra. Dos números se consideran vecinos si sus casillas comparten un lado. Después de llenar toda la cuadrícula, Héctor se dio cuenta de que la suma de todos los vecinos de 9 es 15. ¿Cuál es la suma de todos los vecinos de 8?

1		3
2		4

Problema 2.40. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E4, P4). Octavio tiene cien tarjetas numeradas del 1 al 100. ¿Cuál es la mayor cantidad de tarjetas que puede escoger, de tal manera que el producto de las que escoja no sea múltiplo de 18?

Problema 2.41. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E4, P5). ¿Cuál es la suma de los dígitos de $\underbrace{111\ldots11}_{2019}\times 101$?

Problema 2.42. (4.^{a} OMMEB-Ver., N2, E4, P3). Encuentra el número más pequeño de cuatro dígitos, tal que:

- El producto de los dos primeros dígitos es igual a la suma de los últimos dos.
- El producto del segundo y tercer dígitos es igual a la suma del primero y último dígitos.

Problema 2.43. (4.^{a} OMMEB-Ver., N2, E4, P6). Sea x un número entero positivo de cuatro dígitos, de la forma $x = 4a1b$, tal que es divisible por 12, ¿cuántos números cumplen estas condiciones?

2.4. Preguntas de aritmética, nivel 3

Los problemas que se presentan a continuación formaron parte de los exámenes eliminatorios de la OMMEB en Veracruz. Para poder identificarlos se les ha asignado una notación como la siguiente: **5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E2, P3**; lo anterior significa que dicho ejercicio corresponde a la 5.^{a} OMMEB de Veracruz, del Nivel 3, del Examen selectivo 2, Problema 3.

El nivel 3 en la OMMEB refiere al segundo año de secundaria.

2. 4. 1. Preguntas de opción múltiple

Problema 2.44. (4.^{a} OMMEB-Ver., N3, E1, P1). Si a y b son números enteros, ¿cuál de los incisos es imposible, si el siguiente número es par?

$$a^2 + b^2$$

(a) a y b son pares

(b) a y b son impares

(c) $a + b$ es par

(d) $a + b$ es impar

(e) Ninguno de los anteriores

Problema 2.45. (4.^{a} OMMEB-Ver., N3, E1, P2). ¿Cuál de los incisos puede ser el valor de Z, si los siguientes dos números de siete dígitos son múltiplos de 3?

$$74X52Y1, \quad 326XY4Z.$$

(a) $Z = 1$

(b) $Z = 2$

(c) $Z = 3$

(d) $Z = 5$

(e) Ninguno de los anteriores

Problema 2.46. (4.^{a} OMMEB-Ver., N3, E1, P3). Un número de dos dígitos es tal que el producto de sus dígitos más la suma de sus dígitos es igual al número. ¿Cuál es el dígito de las unidades del número en cuestión?

(a) 3

(b) 5

(c) 7

(d) 9

(e) Ninguno de los anteriores

Problema 2.47. (3.^{a} OMMEB-Ver., N3, E2, P2). Sea n el número más grande tal que la suma de sus dígitos es 2019 y sea m el número más pequeño, tal que la suma de sus dígitos es 2019, ¿cuál es el resultado de la suma de los dígitos de $s = n - m$?

(a) 2019

(b) 1008

(c) 2025

(d) 4038

(e) Ninguno de los anteriores

Problema 2.48. (4.^{a} OMMEB-Ver., N3, E3, P2). En una lista se ponen los números del 1 al 200:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad \cdots \quad 198 \quad 199 \quad 200.$$

Entre los números se colocan signos de suma en los que no son múltiplos de 5 y signos de resta en los que sí lo son, ¿cuál es el resultado de la cuenta establecida?

$$1 + 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 + 8 + 9 - 10 + 11 + \cdots + 198 + 199 - 200.$$

(a) 15800

(b) 11900

(c) 13540

(d) 10260

(e) Ninguno de los anteriores

2. 4. 2. Preguntas abiertas

Problema 2.49. (3.^{a} OMMEB-Ver., N3, E1, P8). En algunas cajas se empacaron 60 manzanas y 60 peras, de manera que cada caja tiene la misma cantidad de manzanas y no hay dos cajas que tengan el mismo número de peras (aunque podría haber una caja sin peras). ¿Cuál es el máximo número de cajas que pudieron haberse usado?

Problema 2.50. (3.^{a} OMMEB-Ver., N3, E1, P10). ¿Cuántos enteros positivos n son tales que su divisor más grande (sin tomar en cuenta al mismo n) es $n-6$?

Problema 2.51. (4.^{a} OMMEB-Ver., N3, E1, P10). Encuentra todos los números de tres cifras tales que el residuo que queda al dividirse entre 5 sea 4, el residuo al dividirse entre 6 sea 5 y el residuo al dividirse entre 7 sea 6.

Problema 2.52. (5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E1, P5). ¿Cuántos números enteros positivos de cinco cifras hay que no son múltiplos de 4 y que al eliminar las primeras dos cifras queda un número que es un cubo perfecto?
Observación. Se dice que un número entero positivo n es un cubo perfecto si es el resultado de elevar al cubo algún número entero positivo, es decir,

$$n = m^3 = m \times m \times m,$$

con m entero positivo. Por ejemplo, 64 es un cubo perfecto, puesto que $64 = 4^3 = 4 \times 4 \times 4$.

Problema 2.53. (5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E1, P7). Toño escribe en tarjetas los números de tres dígitos tales que sus dígitos suman 8. Luego, en una bolsa coloca los números tales que cumplen las siguientes condiciones:

- Los números no contienen al dígito cero.
- El dígito de las unidades entre todos los números es diferente uno de otro.
- El dígito de las decenas entre los números es distinto.
- También el dígito de las centenas entre los números difiere.

¿Cuál es la mayor cantidad de tarjetas que puede tener en la bolsa?

Problema 2.54. (3.^{a} OMMEB-Ver., N3, E2, P6). Si Esteban coloca en forma consecutiva los números pares, iniciando con el 2, uno inmediatamente después del otro, ¿cuál es el dígito que se encuentra en la posición número 100?

Problema 2.55. (4.^{a} OMMEB-Ver., N3, E2, P6). Encuentra el dígito de las unidades de la siguiente suma:

$$2022^1 + 2022^2 + \cdots + 2022^{2021} + 2022^{2022}.$$

Problema 2.56. (4.^{a} OMMEB-Ver., N3, E2, P7). Iván eligió tres dígitos distintos entre sí y diferentes de cero, tales que su suma es 11; luego escribió todos los números de tres cifras que se forman con los dígitos que eligió (sin repeticiones). ¿Cuál es el resultado de sumar todos los números de tres cifras que Iván pudo haber construido con el criterio anterior?

Problema 2.57. (5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E2, P7). Jesús dice que un número es veracruzano si la suma de sus dígitos es divisible por el número de dígitos más uno. Por ejemplo, el 2021 es veracruzano ya que $2+0+2+1=5$ es divisible por $5=4+1$. ¿Cuántos números veracruzanos hay menores a 1000?

Problema 2.58. (3.^{a} OMMEB-Ver., N3, E3, P3). ¿Cuál es el dígito de las unidades del número que se obtiene de realizar la siguiente operación?

$$8^{21}-7^{20}-6^{19}.$$

Problema 2.59. (4.^{a} OMMEB-Ver., N3, E3, P5). En cada uno de los asteriscos de la expresión $1*3*5*7*9$ se colocará un signo $+$ (de suma) o un signo $\times$ (de producto). Si N es el valor más grande que podemos obtener haciendo esas sustituciones en la expresión, ¿cuál es el número primo impar más pequeño que divide a N?

Problema 2.60. (4.^{a} OMMEB-Ver., N3, E3, P7). En la siguiente suma de tres números de tres dígitos, cada letra representa un dígito (siempre el mismo), y letras distintas representan dígitos distintos. Si ningún número empieza con cero, ¿cuáles son todas las posibles soluciones de la suma?

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ + & A & B & C \\ & A & B & C \\ \hline & D & B & C \end{array}$$

Problema 2.61. (5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E3, P5). Considera los números M y N cuyos valores están dados por

$$M=\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{3}\right)\left(4-\frac{1}{4}\right)\left(5-\frac{1}{5}\right)\left(6-\frac{1}{6}\right)\left(7-\frac{1}{7}\right)\left(8-\frac{1}{8}\right)\left(9-\frac{1}{9}\right)\left(10-\frac{1}{10}\right)\left(11-\frac{1}{11}\right),$$
$$N=\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(6-\frac{2}{3}\right)\left(12-\frac{3}{4}\right)\left(20-\frac{4}{5}\right)\left(30-\frac{5}{6}\right).$$

¿Cuál es el valor de $\frac{M}{N}$?

Problema 2.62. (5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E3, P7). Considera todos los números de cinco dígitos distintos entre sí, tal que el segundo dígito es 2 y el cuarto es 4, ¿cuántos números son múltiplos de 36?

Problema 2.63. (4.^{a} OMMEB-Ver., N3, E4, P4). Considera la sucesión de números enteros

$$2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2012, \ldots$$

Cada término de la sucesión, a partir del sexto, se obtiene de los cinco anteriores, sumando los tres primeros y restando los dos últimos. Por ejemplo, el sexto término es $2016+2017+2018-2019-2020=2012$, y el séptimo término es $2017+2018+2019-2020-2012=2022$. Encuentra los términos que se encuentran en las posiciones 2020, 2021 y 2022.

2.5. Soluciones a los problemas de aritmética

2. 5. 1. Nivel 1

Solución del problema 2.1. La respuesta es (b).

Se suma la altura de Mariana a la altura que cuelga el foco y la altura que alcanzan los brazos de ella, es decir $145 + 24 + 45 = 214$ centímetros. Como 2.5 m es igual a 250 cm, entonces el banco debe tener una altura de $250 - 214 = 36$ centímetros.

Solución del problema 2.2. La respuesta es (a).

Como el pentágono es regular tenemos que todos sus lados son iguales, por lo que cada lado debe tener longitud $\frac{120}{5} = 24$. Por otro lado, al ser triángulos equiláteros los picos de la piñata, se tiene que sus lados son iguales, y al compartir un lado con el pentágono cada uno de sus lados mide 24. Luego, el perímetro de la piñata es la suma de todos los lados de los picos que no comparten lado con el pentágono, es decir, diez lados. Por lo tanto, el perímetro de la piñata mide $10(24) = 240$ cm.

Solución del problema 2.3. La respuesta es (b).

Sea x la medida del ancho y $2x$ la medida del largo, como el área del rectángulo está dada por $x \cdot 2x = 2x^2$, debemos fijarnos en cual de las opciones no cumple que al calcular su mitad, lo que queda es un cuadrado perfecto. Notemos que la mitad de 92 es 46, el cual no es un cuadrado perfecto.

Solución del problema 2.4. La respuesta es (a).

Inicialmente Pepe da tres saltos hacia enfrente y uno hacia atrás; realmente solo avanza dos escalones. Así que después de 2020 saltos avanza

$$\frac{2020}{2} = 1010$$

escalones. Notemos que los escalones coloreados de rojo se repiten cada cinco escalones, como comienza en un escalón rojo y 1010 es múltiplo de 5, termina en un escalón rojo.

Solución del problema 2.5. La respuesta es (b).

De la primera suma tenemos que $B + D = 7$ o $B + D = 17$. En el primer caso se debe tener que $A+C = 13$, mientras que en el segundo $A+C = 12$. En cualquier caso la suma de los números de la derecha debe terminar en 37 y el dígito de las centenas debe ser 8, puesto que se llevaría 1 de sumar $C + A$. Notamos también que, tanto en el caso en que $B + D = 7$ como en el que $B + D = 17$, la suma en las centenas agrega a la de los millares lo mismo que se tenía originalmente al pasar de las unidades a las decenas y, como en los millares hay que sumar también A con C, la suma se completa con 13 a la izquierda, dando finalmente el resultado de 13837.

Otra solución. De la primera suma tenemos que $10A + B + 10C + D = 137$. La segunda suma se puede desarrollar como: $10^2(10A + D + 10C + B) + (10C + B + 10A + D) = 10^2 \times 137 + 137 = 13700 + 137 = 13837$.

Solución del problema 2.6. La respuesta es (a).

Notemos que $7007 = 7 \times 7 \times 11 \times 13$. Como queremos que ambos números sean múltiplos de 7, entonces dichos números son

$$7 \times 11 = 77,$$
$$7 \times 13 = 91,$$

cuya suma es 168.

Solución del problema 2.7. Escribamos A, B y C en lugar de los números tachados, de forma que la operación quede $A3 \times 2B = 3C2$, donde debemos sustituir A, B y C por dígitos. Observemos que la única posibilidad para que el resultado de la multiplicación termine en 2 es sustituir B por 4. Como el único múltiplo de 24 entre 300 y 399 es 312, tenemos que C debe sustituirse por 1. Finalmente, A debe sustituirse por 1 para que la operación esté correcta. La suma de los números tachados es $A + B + C = 1 + 4 + 1 = 6$.

Solución del problema 2.8. Como ningún número primo puede terminar en 4, uno de los números de la lista debe ser de dos cifras y empezar con 4, es decir, debe ser 41 o 43. Si 43 está en la lista, con los números restantes no hay posibilidad de escribir ningún número primo que contenga al 1 porque 21 y 51 no son primos, y 31 repetiría el 3 con 43. Así que 41 debe estar en la lista, y esta se puede completar, por ejemplo, con 2, 3 y 5.

Solución del problema 2.9. Si sumamos los resultados de los renglones y los resultados de las columnas obtenemos dos veces la suma de los números del 1 al 9, es decir, 90. Como entre los cinco resultados que se mencionan la suma es 71, el resultado faltante debe ser 15. En la siguiente figura se muestra una posibilidad del acomodo en el que aparecen las sumas mencionadas.

1	8	7
3	5	6
9	4	2

Solución del problema 2.10. Para que pasen simultáneamente por la línea de meta, deberán hacerlo en algún múltiplo de los minutos que tardan en dar la vuelta. Como 120 es el mínimo común múltiplo de 8, 10 y 12, entonces, la primera vez que vuelven a estar juntos en la línea de meta es a los 120 minutos.

Solución del problema 2.11. En un día el gato come $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ de una lata de comida. Así que se acaba la comida en $\frac{6}{\frac{7}{12}} = \frac{72}{7}$, es decir, en más de 10 días pero en menos de 11 días, por lo tanto, se termina las latas el jueves.

Solución del problema 2.12. La respuesta es 4.

Como los números que estamos buscando son divisibles por 10, entonces deben ser de la forma $(10n)^2$, de donde

$$0 < (10n)^2 < 2021,$$

así, $0 < 100n^2 \leq 2021$, que es equivalente a la siguiente desigualdad

$$0 \leq n^2 \leq \left\lfloor \frac{2021}{100} \right\rfloor = 20.$$

De lo anterior, n solo puede tomar los valores de $1, 2, 3, 4$, por lo tanto, solo hay cuatro números que cumplen el problema.

Solución del problema 2.13. Notemos que el anterior producto es igual al siguiente producto

$$\left(\frac{3}{1}\right) \times \left(\frac{5}{3}\right) \times \left(\frac{7}{5}\right) \times \left(\frac{9}{7}\right) \times \left(\frac{11}{9}\right) \times \left(\frac{13}{11}\right),$$

por lo que el producto es igual a 13.

Solución del problema 2.14. Sean n, $n+2$, $n+4$, $n+6$ los números que menciona el problema, así $4n + 12 = 24$, de donde $n = 3$ y, en consecuencia, los demás números son 5, 7 y 9. Por lo tanto, el producto es igual a 945.

Solución del problema 2.15. La primer hoja contiene las páginas 1 y 2, junto con la 499 y la 500. La siguiente hoja contiene las páginas 3, 4 y 497, 498, mientras que la tercera contiene a las 5, 6 y 495, 496. En general, si el número n es impar y menor que 125, tenemos que en la hoja correspondiente aparecen, además, el número par $n + 1$ y las páginas $500 - n$ y la $500 - (n - 1)$. Como 100 es menor que 125, tenemos que en la hoja con la página 100 debe aparecer la página 99; también aparecen las páginas $500 - 99 = 401$ y $500 - 98 = 402$. Por lo tanto, adicional a la página 100, tampoco aparecieron en el libro las páginas 99, 401 y 402.

Solución del problema 2.16. La respuesta es 42 canicas rojas.

Enlistemos la cantidad de canicas que sacamos de cada bolsa en cada ronda

$$\begin{aligned} A &: 1, 4, 7, 10, 13 \\ R &: 2, 5, 8, 11, 14 \\ V &: 3, 6, 9, 12, 15 \end{aligned}$$

Por lo que se sacaron $2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 40$ canicas rojas, pero quedaron dos canicas rojas; por tanto, inicialmente habían 42 canicas rojas.

Solución del problema 2.17. La respuesta es 105 puntos.

Si consideramos los seis dados que están alineados, los puntos que suman son $6(6+5+4+3+2+1) = 6\left(\frac{6\times7}{2}\right) = 126$. Por otro lado, los puntos que quedan pegados al dado del centro suman $\frac{6\times7}{2} = 21$. Entonces, la suma buscada es $126 - 21 = 105$.

Solución del problema 2.18. Notemos que nuestro problema es equivalente a encontrar el dígito de las unidades de la suma

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}.$$

Por lo tanto, el dígito de las unidades de cada elemento de la suma forma la secuencia $2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, 4$; luego, al sumarlos, obtenemos que el dígito de las unidades es 6.

Solución del problema 2.19. Al inicio tenemos 21 números y, en cada movimiento, la cantidad de números escritos en el pizarrón se reduce 2; por lo que en 10 pasos nos quedaremos con un número. Notemos ahora que la suma inicial de los números es $3(1 + 2 + \cdots + 21) = 3(21)(11) = 693$ y, en cada paso, se va restando 2 a la suma de los números que había escritos en el pizarrón, por lo que quedará el número $693 - 10(2) = 673$.

Solución del problema 2.20. La respuesta es 719.

Notemos que

$$\begin{aligned} M &= \left(2-\frac{1}{2}\right)\left(6-\frac{2}{3}\right)\left(12-\frac{3}{4}\right)\left(20-\frac{4}{5}\right)\left(30-\frac{5}{6}\right)\left(42-\frac{6}{7}\right) \\ &= (1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6)N \\ &= 720N. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{M-N}{N}=\frac{720N-N}{N}=\frac{719N}{N}=719.$$

Solución del problema 2.21. En total, los seis hermanos tardaron 90 minutos en bañarse, de modo que el baño ocupado mayor tiempo fue durante 45 minutos o más. Con los tiempos que nos da el enunciado podemos ver que la menor suma, mayor o igual a 45, es 46, así que a las $7{:}46$ horas es lo más temprano que pudieron terminar de bañarse.

Solución del problema 2.22. Notemos que quitar 50 monedas del total sería lo mismo que quitarle 5 monedas a cada pirata, tenemos que hay $\frac{50}{5}=10$ piratas. Si no estuvieran 4 piratas, los otros 6 piratas recibirían 10 monedas más, así que estos 4 piratas recibieron $6\times 10=60$ monedas, por lo que cada pirata recibió $\frac{60}{4}=15$ monedas. En total hay $10\times 150=150$ monedas.

Solución del problema 2.23. Veamos que los términos de la sucesión 3, 8, 5, 6, 7, 4, $9,\ldots$, que están en las posiciones impares forman una sucesión que se obtiene sumando de dos en dos, a partir del 3; esta sucesión es creciente. En las posiciones pares se forma una sucesión que se obtiene restando de dos en dos, a partir de 8; dicha sucesión es decreciente. Como 2020 es par, entonces, estamos en el segundo caso. Notemos que en la posición $2n$ tendremos el número $8-2(n-1)$. Luego, en la posición 2020 estará el número

$$8-2(1010-1)=8-2(1009)=8-2018=-2010.$$

2. 5. 2. Nivel 2

Solución del problema 2.24. La respuesta es (c).

Como todos pagaron la misma cantidad, entonces 110 debe dividir a $1,X20$, es decir, 11 debe dividir a $1X2$. Un número es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de los dígitos en posición impar y la suma de los dígitos en posición par es múltiplo de 11. Luego, $1+2-A$ es múltiplo de 11, pero esta expresión no puede ser igual o mayor que 11, ni puede ser un número negativo, por lo que debe ser igual a 0, así $A=3$.

Solución del problema 2.25. La respuesta es (e).

Sea n el número de etapa en el que formamos el octágono, notemos que la altura está dada por los $2n$ cubos horizontales, los n de las dos diagonales y 1 cubo de cada lado vertical, es decir $2n+2n+2=4n+2$. Luego, para un octágono de altura 2020 se tiene que $4n+2=2020$, es decir $4n=2018$, pero 4 no divide a 2018; por lo tanto, no es posible construir la figura.

Solución del problema 2.26. La respuesta es (e).

Como $56 = 7 \cdot 2^3$, tenemos que 7 debe ser una cifra y el 2^3 se puede descomponer como 1×8 o 2×4. Así que tenemos dos casos:

- Las cifras son $1, 7, 8$, los seis números son: $178, 187, 718, 781, 817, 871$.
- Las cifras son $2, 4, 7$, los seis números son: $247, 274, 427, 472, 724, 742$.

Por lo que en total hay 12 números.

Solución del problema 2.27. La respuesta es (b).

Si llamamos Y al número formado por $\overline{abcde}$, tenemos que $3(2 \cdot 10^5 + Y) = 10 \cdot Y + 2$, de donde $Y = 85714$. Así, la suma buscada es 25.

Solución del problema 2.28. La suma de los siete dígitos es $3a + 4b$. El número de dos dígitos $\overline{ab}$ se puede escribir como $10a + b$. Así, tenemos que $3a + 4b = 10 + b$, de donde $3b = 7a$. Como a y b son dígitos, entonces $a = 3$ y $b = 7$, de donde $a + b = 10$.

Solución del problema 2.29. La respuesta es 480.

Los cubos de tres dígitos son 125, 216, 343, 512 y 729, los cuales pueden ser los primeros tres dígitos. Para los siguientes podemos tomar un dígito cualquiera, pero para que no sea múltiplo de 5, el número del último dígito no debe ser cinco o cero, por lo cual tenemos solo ocho posibilidades. Así, el total de números son $6 \times 10 \times 8 = 480$.

Solución del problema 2.30. Como $500 = 5 \times 100 = 5 \times 10^2$, tenemos que cada 10^2 agrega dos ceros al final de la multiplicación, por lo que la cantidad de ceros que obtenemos es $500 \times 2 = 100$.

Solución del problema 2.31. Notemos que $ab = 10 \cdot a + b$. Luego,

$$\begin{aligned}
154 &= ab + bc + cd + da \\
&= 10 \cdot a + b + 10 \cdot b + c + 10 \cdot c + d + 10 \cdot d + a \\
&= 11 \cdot a + 11 \cdot b + 11 \cdot c + 11 \cdot d \\
&= 11 \cdot (a + b + c + d),
\end{aligned}$$

por lo que $a + b + c + d = \frac{154}{11} = 14$.

Solución del problema 2.32. La respuesta es 8.

Por hipótesis del problema tenemos que

$$\begin{aligned}
d &= \frac{a+b}{2} \\
e &= \frac{a+c}{2}
\end{aligned}$$

Además, tenemos que $3a + 4b + 3c = \overline{de} = 10d + e$, es decir $3a + 4b + 3c = 10(\frac{a+b}{2}) + \frac{a+c}{2}$, lo que a su vez es equivalente a $5c = 5a + 2b$. Notemos que $2b = 5(c - a)$, de donde 5 debe dividir a $2b$, como 5 y 2 son primos relativos, entonces 5 divide a b, y al ser b un dígito solo tiene como opción ser 5 o 0.

Si $b = 0$, tenemos que $5(c-a) = 0$, por lo que $a = c$. Por otro lado, como d es un dígito y debe ser distinto de cero, $\frac{a+b}{2} = \frac{a+0}{2} = \frac{a}{2}$ debe ser un número entero, por lo que a debe ser par. De lo anterior hay cuatro posibilidades para el valor de a, $a = 2, 4, 6, 8$.

Si $b = 5$, se tiene que $10 = 5(c-a)$, por lo que $(c-a) = 2$. Además, como $d = \frac{a+b}{2} = \frac{a+5}{2}$ es entero, se tiene que a debe ser impar por lo que c también. Luego, solo es posible las siguientes parejas (a, c); $(1, 3), (3, 5), (5, 7), (7, 9)$.

De los dos casos llegamos a que hay ocho posibles contraseñas.

Solución del problema 2.33. La respuesta es 138.

Como los cuatro números son consecutivos entonces 7, 11 y 17 corresponden a la descomposición en primos de números distintos. Notemos que uno de los números debe ser $34 = 2 \cdot 17$, pues si fuera $3 \cdot 17 = 51$, obligaría a que otro de los números fuera $55 = 5 \cdot 11$ y, en consecuencia, tuvieramos $54 = 2 \cdot 3^3$ el cual no es posible de construir. Por lo tanto, los tres números restantes son números mayores o menores que 34, los cuales serían $3 \cdot 11 = 33$, $7 \cdot 5 = 35$, $2^2 \cdot 3^2 = 36$. La suma de estos cuatro números es 138.

Solución del problema 2.34. La respuesta es 300 números.

Un número es divisible por 3 si y solo si la suma de sus dígitos es divisible por 3. De esta forma como $2 + 6 = 8$, entonces $abc26$ es divisible por 3 si y solo si abc tiene residuo 1 cuando se divide por 3. Como hay 900 números de tres dígitos, hay $\frac{900}{3} = 300$ que tienen residuo 1 cuando se dividen por 3.

Solución del problema 2.35. La respuesta es 34.

Tenemos dos opciones para los números pequeños que estén entre las parejas $\{1, 8\}$ o $\{2, 4\}$. Si fueran 1 y 8, los demás números en el cuaderno necesariamente son mayores que 8; sin embargo, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, por lo que en el cuaderno debe estar alguna de las parejas $\{2, 15\}$, $\{3, 10\}$, $\{5, 6\}$ o $\{1, 30\}$. Cualquiera de las parejas anteriores tiene por lo menos algún número menor que 8. Por lo tanto, los números más pequeños son 2 y 4; como los demás números en el cuaderno deben ser mayores a 4, entonces, la pareja de números intermedios es $\{5, 6\}$.

Ahora, sabemos que $72 = 2^3 \cdot 3^2$, por lo que los números más grandes solo tienen como posibilidad las parejas $\{8, 9\}$ o $\{6, 12\}$. Si la pareja de los más grandes es $\{6, 12\}$, entonces, entre los números más pequeños y los más grandes solo se encuentra el 5; por lo que solo tendríamos cinco números. Luego, los números más grandes son 8 y 9, en consecuencia, los números restantes en el cuaderno son 5 y 6. Concluimos que la suma de los números en el cuaderno es

$$2 + 4 + 5 + 6 + 8 + 9 = 34.$$

Solución del problema 2.36. La respuesta es 2070720.

Notemos que

$$\begin{aligned} M &= \left(2 - \frac{1}{2}\right)\left(6 - \frac{2}{3}\right)\left(12 - \frac{3}{4}\right)\left(20 - \frac{4}{5}\right)\left(30 - \frac{5}{6}\right)\left(42 - \frac{6}{7}\right) \\ &= (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6)N \\ &= 720N. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $M - N = 720N - N = 719N$.

Además, tenemos que

$$\begin{aligned}
N &= \left(2 - \frac{1}{2}\right)\left(3 - \frac{1}{3}\right)\left(4 - \frac{1}{4}\right)\left(5 - \frac{1}{5}\right)\left(6 - \frac{1}{6}\right)\left(7 - \frac{1}{7}\right) \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{15}{4}\right)\left(\frac{24}{5}\right)\left(\frac{35}{6}\right)\left(\frac{48}{7}\right) \\
&= 3\left(\frac{8}{2}\right)\left(\frac{15}{3}\right)\left(\frac{24}{4}\right)\left(\frac{35}{5}\right)\left(\frac{48}{6}\right)\left(\frac{1}{7}\right) \\
&= \frac{3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{7} \\
&= 2880
\end{aligned}$$

Concluimos que $M - N = 719(2880) = 2070720$.

Solución del problema 2.37. La respuesta es 22.

Sea $N = \overline{abcd}$ un número que cumple las condiciones del problema, como N es múltiplo de 12 debe de ser divisible por 4 y 3.

Ahora, al ser divisible por 4 se cumple que 4 divide al número formado por los últimos dos dígitos, es decir a $\overline{cd}$. De esto último tendríamos que cd puede tomar los siguientes valores $04, 08, 20, 24, 28, 40, 48, 60, 64, 68, 80, 84$, pues los dígitos de N son pares y todos distintos.

Luego, para saber si N es divisible por 3, la suma de los dígitos de N tiene que ser un múltiplo de 3, de esta forma N solo puede estar constituido por dígitos de los conjuntos $\{0, 2, 4, 6\}$ o $\{0, 4, 6, 8\}$. Así, los números que cumplen con las condiciones del problema son: 2604, 6204, 4608, 6408, 4620, 6420, 6024, 6240, 2640, 8640, 6840, 6048, 2460, 4260, 8460, 4860, 8064, 2064, 4068, 6480, 4680 y 6084, lo que nos da un total de 22 números.

Solución del problema 2.38. La respuesta es $B = 0$ y $C = 5$.

Notemos que la suma de dos números de cuatro cifras está entre 2000 y 19998. Como el resultado de nuestra suma es un número de cinco cifras, quiere decir que el primer dígito de este número es 1, así $E = 1$.

Por otro lado, $D + A$ nos debe dar como resultado un número que termine en 1, además de que no es posible que alguno de estos dos dígitos sea 0 y 1 en algún orden por hipótesis del problema. Luego, $D + A = 11$, por lo que $2C + 1$ debe terminar en 1 también, con lo que $2C = 0$ o bien $2C = 10$.

Si $C = 0$, entonces $2B$ debe terminar en 1, pero eso no es posible, pues es un número par. Si $C = 5$, entonces $2C + 1 = 11$, con lo que tendremos que $2B + 1$ termina en 1, nuevamente tenemos dos opciones, que $B = 0$, o bien $B = 5$.

Si $B = 0$, se cumple que $2B + 1$ termina en 1. Si $B = 5$, entonces $2B + 1 = 11$ y $A + D = 12$, pero esto no puede pasar, pues los dígitos de la suma resultante deben ser todos 1. Por lo tanto, los valores de B y C son 0 y 5, respectivamente.

Solución del problema 2.39. La respuesta es 27.

Si el 9 estuviera en la casilla central la suma de sus vecinos sería $8+7+6+5 = 26$ y no cumpliría que la suma de sus vecinos es 15, por lo que el 9 tiene que estar en alguno de los extremos y tener dos vecinos en las esquinas del cuadrado. La mayor suma que se puede obtener con números de las esquinas es $3 + 4 = 7$; como los vecinos de 9 suman 15, la única posibilidad de que esto suceda es que el 9 sea vecino de $3, 4$ y 8. Luego, el 8 debe estar en la casilla central y sus vecinos son $5, 6, 7$ y 9, que suman 27.

Solución del problema 2.40. La respuesta es 68 tarjetas.

Ya que $18 = 3^2 \cdot 2$, si escogiera dos múltiplos de 3 o un múltiplo de 9 tendría que evitar elegir todos los números pares, por lo que se quedaría con menos de 50 tarjetas. Si escoge un múltiplo de 3 que no sea múltiplo de 9, el máximo número de cartas que podemos escoger es $100 - 32 = 68$, pues no tomamos los múltiplos de 3 del 1 al 100.

Solución del problema 2.41. Tenemos que

$$\begin{aligned}\underbrace{111\ldots11}_{2019}\times 101 &= \underbrace{111\ldots11}_{2019}\times 100 + \underbrace{111\ldots11}_{2019}\\ &= \underbrace{111\ldots11}_{2019}00 + \underbrace{111\ldots11}_{2019}\\ &= 11\underbrace{222\ldots22}_{2017}11.\end{aligned}$$

Por lo que la suma de sus dígitos es $2(2017) + 4 = 4038$.

Solución del problema 2.42. Sea $abcd$ el número que buscamos, por el enunciado sabemos que

$$ab = c + d, \quad bc = a + d.$$

Si restamos la segunda ecuación de la primera tenemos que $ab - bc = c + d - a - d$, de donde llegamos a que $b(a - c) = c - a$, y con eso se tiene que $(b - 1)(a - c) = 0$. De donde $b = 1$ o $a - c = 0$:

- Caso 1. Si $b = 1$, tendríamos que $a = c + d$ y $c = a + d$, por lo tanto, $a = c$ y $d = 0$. Por lo que el número más pequeño que cumple con el problema es 1110.
- Caso 2. Si $a = c$, de la primera ecuación tenemos que $ab = a + d$, de donde $a(b-1) = d$. Como queremos el número más pequeño, se requiere que el primer dígito sea lo más pequeño posible, por lo que $a = 1$, $b = 1$ y $d = 0$.

Por lo tanto, 1110 es el número más pequeño que podemos encontrar.

Solución del problema 2.43. Para que un número sea divisible por 12 nos basta verificar que sea divisible por 4 y 3. Si $4a1b$ es divisible por 4, entonces $1b$ es divisible por 4, con lo que tenemos que $b = 2$, o bien $b = 6$. Por otro lado, para que el número sea divisible por 3 se debe tener que la suma de sus dígitos sea múltiplo de 3, por lo que tenemos los siguientes casos:

- Si $b = 2$, tenemos que el número es de la forma $4a12$ cuya suma de dígitos es $4 + a + 1 + 2 = 7 + a$, con lo que tenemos para a las opciones $a = 2$, $a = 5$, $a = 8$.
- Si $b = 6$, entonces la suma de dígitos es $4 + a + 1 + 6 = 11 + a$, de donde los posibles valores de a son $1, 4, 7$.

Por lo tanto, hay seis números que cumplen esto.

2. 5. 3. Nivel 3

Solución del problema 2.44. La respuesta es (d).

Como $a^2 + b^2$ es par, entonces a^2 y b^2 son pares, o bien ambos números son impares. Por otro lado, a y b son pares, o bien ambos son impares, pues la raíz cuadrada de un número par resulta en un número par y la raíz cuadrada de un número impar es un número impar. Por lo que $a+b$ debe ser par y, por lo tanto, el inciso (d) es imposible.

Solución del problema 2.45. La respuesta es (a).

Como son múltiplos de 3, la suma de los dígitos de ambos números debe ser múltiplo de 3, es decir $7+4+X+5+2+Y+1$ y $3+2+6+X+Y+4+Z$ son múltiplos de 3. Notemos que $7+4+5+2+1$ deja residuo 1 cuando lo dividimos por 3, por lo que $X+Y$ debe dejar residuo 2 cuando se divide por 3. Ahora, por otro lado tenemos que $3+2+6+4=15$ es divisible por 3, por lo que $X+Y+Z$ es múltiplo de 3 y como $X+Y$ deja residuo 2 al dividirse por 3, entonces Z deja residuo 1 cuando se divide por 3. Por lo anterior, tenemos que Z puede ser 1, 4 o 7, así que la respuesta es (a).

Solución del problema 2.46. La respuesta es (d).

Ya que es un número de dos dígitos podemos expresarlo como $10a+b$, donde a y b son dígitos. Del enunciado tenemos que $10a+b = a\cdot b+a+b$, que podemos simplificar a $10a = a\cdot b + a$ y factorizar esta como $(10)a = (b+1)a$. Dividimos por a y obtenemos que $b+1=10$, por lo tanto, $b=9$.

Solución del problema 2.47. La respuesta es (c).

El número más grande que podemos formar con las condiciones del problema es el que está formado por 2019 cifras iguales a 1 y el más pequeño es formado por un 3, seguido de 224 cifras iguales a 9. Notemos que cuando realizamos la resta nos queda un número formado de la siguiente manera:

$$\underbrace{1\cdots 1}_{1793 \text{ cifras}}\ 07\,\underbrace{11\cdots 1}_{223 \text{ cifras}}\,2.$$

Así que la suma es $2016+9=2025$.

Solución del problema 2.48. La respuesta es (b).

Si la cuenta es igual a sumar todos los números del 1 al 200 restándole dos veces los múltiplos de 5, tendríamos que

$$\begin{aligned}1+2+3+4-5+6+7+8+9-10+11+\cdots+198+199-200\\ &=1+2+3+\cdots+198+199+200-2(5+10+15+\cdots+195+200)\\ &=\sum_{n=1}^{200} n - 2\sum_{m=1}^{40} 5m\\ &=\frac{(200)(201)}{2} - 2\cdot 5\frac{(40)(41)}{2}\\ &=11900.\end{aligned}$$

Solución del problema 2.49. Como todas las cajas tienen la misma cantidad de manzanas, entonces 60 es divisible entre el número de cajas. La suma de 12 o más enteros distintos es, al menos, $0+1+2+\cdots+11=66$; así que el número de cajas es menor a 12. El siguiente divisor de 60 menor que 12 es 10, y sí es posible lograr la condición con los siguientes números de peras para las cajas: $1,2,3,4,5,6,7,8,9,15$.

Solución del problema 2.50. Tenemos que $6=n-(n-6)$ y, como $n-6$ es divisor de n y de sí mismo, tenemos que $n-6$ es divisor de 6. Entonces, las posibilidades para $n-6$ son 1, 2, 3 y 6; de donde las posibilidades para n son $7,8,9$ y 12. Ahora revisamos en cada una de estas si $n-6$ es el mayor divisor de n, lo cual solo ocurre para $7,9$ y 12.

Solución del problema 2.51. Sea x un número que cumple con lo que pide el problema, notemos que $x+1$ es divisible por $5,6$ y 7, es decir, es divisible por $5\cdot 6\cdot 7=210$; así que los x que buscamos son múltiplos de 210 disminuido una unidad. Del 101 al 999 hay tres múltiplos de 210: 420, 630 y 840. Por lo tanto, los números que cumplen el enunciado son 209, 419, 629 y 839.

Solución del problema 2.52. La respuesta es 270.

Los cubos de tres dígitos son 125, 216, 343, 512 y 729, de los cuales descartamos a 216 y 512 para que sean los últimos tres dígitos por el criterio de divisibilidad por 4. Luego, los primeros dos dígitos pueden ser cualesquiera mientras el primero no sea cero, por lo que tenemos en total $3\times 9\times 10=270$.

Solución del problema 2.53. La respuesta es 4.

Los números que no contienen al dígito cero y sus cifras suman 8 son: 611, 521, 512, 431, 422, 413, 341, 332, 323, 314, 251, 242, 233, 224, 215, 161, 152, 143, 134, 125, 116. Veamos que a lo más podemos tener 4 números en la bolsa, tomando los números 521, 332, 143, 215. Si hubieran 5 números, la suma de los dígitos de los números de la bolsa sería $8(5)=40$ y al menos la suma de los dígitos debe ser $3(1+2+3+4+5)=45$, lo cual no es posible. Por lo tanto, la mayor cantidad de tarjetas que puede tener en la bolsa es 4.

Solución del problema 2.54. Notemos que solo tenemos cuatro números de un dígito y 5×9 números pares de dos dígitos, que nos dan un total de 90 dígitos; luego, al escribir el número 98 tenemos $4+90=94$ dígitos escritos, por lo que nos faltan seis dígitos más para encontrar el que queremos. Entonces, al escribir los números 100 y 102 encontramos que 2 es el dígito en la posición 100.

Solución del problema 2.55. Notemos que nuestro problema es equivalente a encontrar el dígito de las unidades de la suma

$$2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{2021}+2^{2022}.$$

Ahora, veamos que el dígito de las unidades de cada elemento de la suma forma la secuencia

$$\underbrace{\underbrace{2,4,8,6},\underbrace{2,4,8,6},\ldots,\underbrace{2,4,8,6}}_{505 \text{ bloques}},2,4.$$

De esta forma tenemos 505 bloques de cuatro elementos $2,4,6,8$, los cuales sumados no afectan al dígito de las unidades, por lo que el dígito que buscamos está dado por la suma de los elementos 2021 y 2022 de la secuencia, es decir, $2+4=6$.

Solución del problema 2.56. Sean a, b y c los dígitos que eligió Iván, notemos que, en total, formó $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ números de tres cifras:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab \text{ y } cba.$$

Observemos que al utilizar el algoritmo usual para sumar estos números, en la columna de las unidades obtenemos $2(a + b + c) = 2(11) = 22$ y, de la misma forma, para la columna de las decenas y las centenas. Así que el resultado final es

$$\begin{array}{cr} & abc \\ & acb \\ & bac \\ + & bca \\ & cab \\ & cba \\ \hline & 2442 \end{array}$$

Por lo que, cada vez que elija tres dígitos y realice este proceso, el resultado de la suma será 2442. Ahora veamos cuántas opciones tiene para elegir los tres dígitos; fijemos el valor de a.

Para $a = 9$ no obtenemos combinaciones válidas; si $a = 8$, obtenemos 821; si $a = 7$, obtenemos 731; si $a = 6$, obtenemos 641 y 632; si $a = 5$, obtenemos 542. Notemos que los casos para $a = 4$, $a = 3$, $a = 2$ y $a = 1$ ya están contemplados, así que Iván pudo haber elegido los dígitos de 5 maneras diferentes. Por lo tanto, al realizar el proceso descrito en el enunciado del problema, el resultado de la suma será

$$5(2442) = 12210.$$

Solución del problema 2.57. La respuesta es 182.

Un número de un dígito es veracruzano si es par, por lo que tenemos al $2, 4, 6, 8$. Luego, un número de dos dígitos es veracruzano si es múltiplo de tres, por lo que tenemos 30 múltiplos de tres.

Ahora, un número de tres dígitos es veracruzano si la suma de sus cifras es múltiplo de cuatro. La suma mínima de los dígitos es 4 y la mayor es 24. Trataremos el problema por casos:

- Veamos las ternas que suman 4 y cómo podemos acomodar estos números para formar números de tres dígitos. Estas son

  $$(0, 0, 4), (0, 1, 3), (0, 2, 2), (1, 1, 2).$$

  De la primer terna sale un número; de la segunda, como no puede iniciar en cero, tenemos $2 \times 2 = 4$ números. Para la tercer terna tenemos dos números y para la última tenemos tres números, ya que escogemos tres espacios para acomodar el 1 y en el que queda acomodamos el 2. En total hay $1 + 4 + 2 + 3 = 10$.

- Las ternas que suman 8 son

  $$(0, 0, 8), (0, 1, 7), (0, 2, 6), (0, 3, 5), (0, 4, 4),$$

las cuales aportan $1+4+4+4+2=15$ números. Además, tenemos

$$(1,1,6),(1,2,5),(1,3,4),(2,2,4),(2,3,3),$$

los cuales aportan $3+6+6+3+3=21$ números. En total tenemos $15+21=36$ números que sus dígitos suman 8.

- Las ternas que suman 16 son

$$(0,7,9),(0,8,8),$$

que aportan $4+2=6$ números. Además tenemos las ternas

$$(1,6,9),(1,7,8),(2,5,9),(2,6,8),(2,7,7),(3,4,9),$$
$$(3,5,8),(3,6,7),(4,4,8),(4,5,7),(4,6,6),(5,5,6),$$

las cuales aportan $6\times 8+3\times 4=48+12=60$. En total tenemos 66 números.

- Las ternas que suman 20 son

$$(2,9,9),(3,8,9),(4,7,9),(4,8,8),(5,6,9),(5,7,8),(6,6,8),(6,7,7),$$

los cuales aportan $6\times 4+3\times 4=24+12=36$ números.

- Las ternas que suman 24 son

$$(6,9,9),(7,8,9),(8,8,8),$$

que aportan $3+6+1=10$ números.

En total, tenemos $4+30+10+36+66+36=182$ números veracruzanos.

Solución del problema 2.58. La respuesta es el dígito 1.

Como nos preguntan por el dígito de las unidades de la resta, solo nos interesará saber el dígito de las unidades de 8^{21}, 7^{20} y 6^{19}. Notemos que 8^1 termina en 8, 8^2 en 4, 8^3 en 2, 8^4 en 6, y a partir de 8^5 se repite el ciclo, por lo que 8^{21} termina en 8. Análogamente, podemos encontrar que 7^{20} termina en 1 y 6^{19} en 6. Luego, el dígito de la unidades de $8^{21}-7^{20}-6^{19}$ es $8-1-6=1$.

Solución del problema 2.59. El valor más grande lo obtenemos multiplicando los números en lugar de sumarlos, excepto por el 1, es decir, $N=1+3\times 5\times 7\times 9=946$. Luego, tenemos que como N es el consecutivo a un número múltiplo de 3, de 5 y de 7, entonces, N no es divisible por 3, ni por 5, ni por 7. Luego, notemos que $946=11(86)$, por lo que N es múltiplo de 11.

Solución del problema 2.60. Notemos que

$$\begin{aligned} 3C &= C, \text{ o bien} \\ 3C &= C+10, \text{ o bien} \\ 3C &= C+20. \end{aligned}$$

Así que $C=0$, $C=5$, o bien $C=10$. Como C debe ser un dígito, descartamos el último caso, $C=10$.

- Caso 1. Si $C = 5$, $3C = 15$, por lo que se debe agregar una unidad a la columna de las decenas. Luego,

$$\begin{aligned} 3B + 1 &= B, \text{ o bien} \\ 3B + 1 &= B + 10, \text{ o bien} \\ 3B + 1 &= B + 20, \end{aligned}$$

  de donde ninguna solución para B es entera positiva, por lo que descartamos este caso.

- Caso 2. Si $C = 0$, por un argumento análogo al anterior

$$B = 0, \text{ o bien } B = 5.$$

  Como B y C no pueden tomar el mismo valor, el único caso posible para estos números es $C = 0$ y $B = 5$. Finalmente, notemos que si consideramos $3A + 1 = D$, tenemos

  - Si $A = 1$, entonces $D = 4$.
  - Si $A = 2$, entonces $D = 7$.
  - Si $A \geq 3$, entonces $D \geq 10$, donde este último caso no satisface las condiciones del problema.

  Por lo tanto, las soluciones al problema son

  - $DBC = 450$ y
  - $DBC = 750$.

Solución del problema 2.61. La respuesta es 432.

Notemos que

$$\begin{aligned} N &= \left(2 - \frac{1}{2}\right)\left(6 - \frac{2}{3}\right)\left(12 - \frac{3}{4}\right)\left(20 - \frac{4}{5}\right)\left(30 - \frac{5}{6}\right) \\ &= \left(2 - \frac{1}{2}\right)\left(3 - \frac{1}{3}\right)\left(4 - \frac{1}{4}\right)\left(5 - \frac{1}{5}\right)\left(6 - \frac{1}{6}\right)(2 \times 3 \times 4 \times 5). \end{aligned}$$

Al cancelar los factores $\left(2 - \frac{1}{2}\right)\left(3 - \frac{1}{3}\right)\left(4 - \frac{1}{4}\right)\left(5 - \frac{1}{5}\right)\left(6 - \frac{1}{6}\right)$ del numerador y denominador, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{M}{N} &= \frac{\left(7-\frac{1}{7}\right)\left(8-\frac{1}{8}\right)\left(9-\frac{1}{9}\right)\left(10-\frac{1}{10}\right)\left(11-\frac{1}{11}\right)}{2\times 3\times 4\times 5}\\
&= \frac{\frac{7^2-1}{7}\frac{8^2-1}{8}\frac{9^2-1}{9}\frac{10^2-1}{10}\frac{11^2-1}{11}}{2\times 3\times 4\times 5}\\
&= \frac{\frac{(7+1)(7-1)}{7}\frac{(8+1)(8-1)}{8}\frac{(9+1)(9-1)}{9}\frac{(10-1)(10+1)}{10}\frac{(11-1)(11+1)}{11}}{2\times 3\times 4\times 5}\\
&= \frac{\frac{8(6)\times 9(7)\times 10(8)\times 11(9)\times 12(10)}{7\times 8\times 9\times 10\times 11}}{2\times 3\times 4\times 5}\\
&= \frac{6\times 8\times 9\times 12\times 10}{2\times 3\times 4\times 5}\\
&= 2\times 9\times 12\times 2 = 432.
\end{aligned}$$

Solución del problema 2.62. La respuesta es ocho números.

Sea $N = a2c4e$, con $a \neq 0$, como N es divisible por 36 tenemos que 4 divide a N y 9 divide a N. Si 4 divide a N, entonces 4 debe dividir al número que forman los últimos dos dígitos $4e$. De lo anterior tendríamos que $e = 0$, 4 u 8, pero como los dígitos deben ser distintos entre sí, excluimos al 4. Además, como N debe ser divisible por 9, la suma de sus dígitos debe ser múltiplo de 9. De esta manera tenemos los siguientes casos:

- Caso 1. Si $e = 0$, entonces $a + 2 + c + 4 + 0 = a + c + 6$ es múltiplo de 9, por lo que $a + c = 3$, o bien $a + c = 12$.

  Para el primer subcaso los valores de a y c solo pueden tomarse de entre las parejas $\{0, 3\}$ o $\{1, 2\}$. Como los dígitos de N deben ser distintos entre sí, entonces no hay ningún número que cumpla con esto.

  En el segundo subcaso a y c pueden tomarse de entre las parejas $\{3, 9\}$ o $\{5, 7\}$. Luego, tenemos los números 32940, 92340, 52740 y 72540.

- Caso 2. Si $e = 8$, entonces $a + 2 + c + 4 + 8 = 14 + a + c$ es múltiplo de 9, por lo que $a + c = 4$, o bien $a + c = 13$.

  Para el primer subcaso los valores de a y c solo pueden tomarse de entre las parejas $\{0, 4\}$, $\{1, 3\}$ o $\{2, 2\}$. Los números que cumplen las condiciones establecidas son 12348 y 32148.

  En el segundo subcaso a y c pueden tomarse de entre las parejas $\{4, 9\}$, $\{5, 8\}$ o $\{6, 7\}$. De lo anterior obtenemos los números 62748 y 72648.

Concluimos que hay ocho números que cumplen las condiciones impuestas.

Solución del problema 2.63. Si $a_1 = 2016$, $a_2 = 2017$, $a_3 = 2018$, $a_4 = 2019$, $a_5 = 2020$, lo siguientes términos de la sucesión son: $a_6 = 2012$, $a_7 = 2022$, $a_8 = 2023$, $a_9 = 2006$, $a_{10} = 2025$, $a_{11} = 2026$. Notemos lo siguiente, para k entero positivo se tiene que

$$\begin{aligned}
a_{6+3k} &= 2012 - 6k,\\
a_{7+3k} &= 2022 + 3k,\\
a_{8+3k} &= 2023 + 3k.
\end{aligned}$$

Por otro lado, $2020 = 3(671) + 7$, $2021 = 8 + 3(671)$, $2022 = 6 + 3(672)$, por lo que

$$\begin{aligned}
a_{2020} &= a_{7+3(671)} = 2022 + 3(671) = 4035, \\
a_{2021} &= a_{8+3(671)} = 2023 + 3(671) = 4036, \\
a_{2022} &= a_{6+3(672)} = 2012 - 6(672) = -2020.
\end{aligned}$$

Capítulo 3
Álgebra

3.1. Definiciones y resultados básicos

En esta sección presentaremos las definiciones y propiedades básicas sobre álgebra, mismas que serán de utilidad para la resolución de los problemas que se plantean en este capítulo. En los libros Aguilar Márquez *et al*. (2009), Lehmann (2004) y Silva Ochoa y Lazo de Sánchez (2008) se puede encontrar mayor información al respecto.

3. 1. 1. Operaciones con letras

Álgebra es la rama de las matemáticas que estudia y resuelve problemas numéricos en su forma más general, por lo cual los números suelen ser representados por letras (también llamadas *variables*) que, al igual que los números, estarán relacionadas mediante una o varias de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación; aplicadas una o varias veces, en cualquier orden. De esta manera, se obtienen cadenas de variables y operaciones matemáticas que, junto con las constantes y los símbolos de agrupación, forman lo que se llama una *expresión algebraica*.

Definición 13. Una **variable** es un símbolo que representa los elementos de un conjunto que contiene por lo menos dos de estos elementos; a las variables se les suele denotar con las últimas letras del abecedario, por ejemplo x, y, x, w, etc.

Una **constante** es un símbolo que representa exactamente a un solo objeto. En álgebra, suelen utilizarse las primeras letras del abecedario, por ejemplo a, b, c, etc.

Definición 14. La **suma** de una misma variable se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 3x &= x + x + x, \\ -3y &= -y - y - y = (-y) + (-y) + (-y), \\ az &= \underbrace{z + z + \cdots + z}_{a \text{ veces}}, \end{aligned}$$

donde, en el último ejemplo, a puede representar a un entero tanto positivo como negativo, pero único.

De acuerdo a la definición anterior, es posible realizar sumas tales como:

$$\begin{aligned}
3x + 7x &= 10x, \\
-3z + 8z &= 5z, \\
ax + bx &= \underbrace{x + x + \cdots + x}_{a+b \text{ veces}} = (a+b)x, \\
3x + 2y &= 3x + 2y, \\
ax + ay &= ax + ay.
\end{aligned}$$

Notemos que las dos últimas sumas no pueden ser reducidas a expresiones más pequeñas debido a que x y y son variables diferentes. En álgebra se dice que *no son términos semejantes*.

Definición 15. El **producto** y el **cociente** entre dos variables (x y y) se representan, respectivamente, mediante

$$xy = (x)(y), \qquad \frac{x}{y} = (x)\left(\frac{1}{y}\right).$$

Debemos notar que el cociente tendrá sentido siempre que impongamos a y la condición de nunca ser cero.

De manera similar, podemos definir el producto de una misma variable de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
(x)(x) &= x^2, \\
(ax)(bx) &= (ab)(x)(x) = abx^2, \\
\underbrace{(x)(x)\cdots(x)}_{n \text{ veces}} &= x^n,
\end{aligned}$$

donde a y b representan a cualquier número real y n representa a un entero positivo.

De acuerdo a la definición anterior, es posible realizar productos tales como:

$$\begin{aligned}
(3x)(7x) &= 21x^2, \\
(3x)(3x) &= (3x)^2 = 9x^2, \\
(3x)(2y) &= 6xy, \\
(x^2)(x^4) &= \underbrace{(x)(x)}_{2 \text{ veces}}\ \underbrace{(x)(x)(x)(x)}_{4 \text{ veces}} = \underbrace{(x)(x)(x)(x)(x)(x)}_{6 \text{ veces}} = x^6.
\end{aligned}$$

Notemos que el último resultado equivale a sumar los exponentes, 2 y 4, de la expresión inicial, esta es una de las llamadas *propiedades de los exponentes* de las cuales hablaremos más adelante.

Definición 16. La **propiedad distributiva** es una igualdad que relaciona el producto y la suma:

$$\begin{aligned} 3(x+y) &= 3x+3y, \\ 2(x+y^2) &= 2x+2y^2, \\ z(x^2+y^3) &= zx^2+zy^3, \\ x(x^2+x^3) &= x(x^2)+x(x^3) = x^3+x^4, \\ (x+2)(x+4) &= (x+2)x+(x+2)4 = x^2+2x+4x+8 = x^2+6x+8. \end{aligned}$$

De esta manera, a partir de las dos definiciones anteriores podemos realizar cálculos, como los que aparecen en el siguiente ejemplo.

► **Ejemplo**

Reduce cada una de las expresiones

$$\begin{aligned} 5(3x+8y)-2(x+4y) &= 5(3x)+5(8y)-2x-2(4y) \\ &= 15x+40y-2x-8y \\ &= 13x+32y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(3x+2y)-y(3z+2)+4y &= z(3x)+z(2y)-y(3z)-y(2)+4y \\ &= 3xz+2zy-3yz-2y+4y \\ &= 3xz-yz+2y. \end{aligned}$$

3. 1. 2. Letras y problemas

Las notaciones y operaciones algebraicas mostradas en la sección anterior son de gran utilidad en la resolución de problemas, la mayoría relacionados con alguna situación de la vida real. Traducir una expresión verbal en una expresión matemática requiere, además de una lectura cuidadosa, de los siguientes cuatro pasos:

1. Identificar cuál/cuáles son las variables del problema.
2. Identificar los datos con que contamos.
3. Identificar la pregunta.
4. Relacionar los datos con las variables.

► **Ejemplos**

1. Traducir los siguientes enunciados a lenguaje algebraico:

   a) "El cuádruple de la edad de Juan (en años) *disminuido* en 11, es igual a la vigésima parte del año 2020".

   b) "El cuádruple de la edad de Juan (en años) *disminuida* en 11, es igual a la vigésima parte del año 2020".

Notemos que en estos problemas se desconoce la edad de Juan por lo que esta es nuestra variable y la denotaremos por x. De igual forma, en ambos casos se considera una disminución de 11 años y una igualdad con la vigésima parte del año pasado, es decir, el año 2020; estos serán nuestros datos.

Adicionalmente, la única diferencia entre los dos enunciados está en la palabra *disminuido* y *disminuida*, respectivamente.

Analicemos paso a paso la construcción de la expresión algebraica que describe a cada uno de los enunciados

a) En este primer ejemplo nos habla de que el cuádruple de la edad de Juan, es decir, $4x$ es disminuido en 11, por tanto, tenemos $4x - 11$. Al igualar con la vigésima parte del año 2020 obtenemos que la traducción algebraica del enunciado es

$$4x - 11 = \frac{2020}{20}.$$

b) En el segundo enunciado se habla del cuádruple de la edad de Juan disminuida en 11, por tanto, primero debemos considerar la disminución, esto es $x-11$ y, después, el cuádruple de este resultado, es decir $4(x-11)$. Al igualar con la vigésima parte del año 2020 obtenemos que la traducción algebraica del enunciado es

$$4(x - 11) = \frac{2020}{20};$$

al lado izquierdo de la igualdad podemos aplicarle la propiedad distributiva ya estudiada, obteniendo

$$4x - 44 = \frac{2020}{20}.$$

Evidentemente, las expresiones algebraicas obtenidas en estos enunciados son diferentes a pesar de que entre ellos solo había diferencia en una vocal.

2. En el ejemplo anterior se utilizó una sola variable y dos datos, pero esto no necesariamente debe ocurrir así.

   El número de caramelos que tiene Carlos es tres veces el que tiene Carla. Si cada uno de ellos recibe dos caramelos más, el total de caramelos será 8. Expresar la situación en forma algebraica.

   Primero, observemos que las variables son el número de caramelos de Carlos y Carla, y denotemos estas cantidades por y y x, respectivamente.

   Como Carlos tiene tres veces los caramelos de Carla, esto significa que

$$y = 3x.$$

Ahora, cuando cada uno recibe dos caramelos, Carlos tiene un total de $y+2$, mientras que Carla tiene $x+2$. Como nos dicen que el total es de 8, entonces tenemos que

$$(y+2)+(x+2)=8.$$

Por tanto, las ecuaciones que representan la situación en forma algebraica son

$$\left.\begin{aligned} y &= 3x, \\ (y+2)+(x+2) &= 8. \end{aligned}\right\}$$

Más adelante se abordarán los métodos para hallar la solución de problemas donde se debe hallar los valores de x y y que satisfagan, al mismo tiempo, las expresiones encontradas.

► Ejemplo

Las edades de Hugo, Paco y Luis suman 18; la edad de Luis es el triple de la de Hugo y, en un año, la suma de las edades de Hugo y Paco será igual a la edad que Luis tendrá dentro de dos años. Expresar la situación en forma algebraica.

Denotemos por x la edad de Hugo, y la edad de Paco y z la edad de Luis. La primera condición que tenemos es que la suma de las edades es 18, por tanto, tenemos que

$$x+y+z=18.$$

Al proseguir con la lectura, encontramos que la edad de Luis es el triple de la de Hugo, es decir,

$$z=3x.$$

La tercera parte del enunciado nos habla de las edades de Hugo y Paco dentro de un año, es decir, $x+1$ y $y+1$, respectivamente; y de la edad de Luis dentro de dos años, esto es $z+2$. Así, al expresar la suma de las edades de Hugo y Paco e igualarla a la de Luis tenemos

$$(x+1)+(y+1)=z+2.$$

Por lo tanto, la representación algebraica del problema está dada por las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 18, \\ z &= 3x, \\ (x+1)+(y+1) &= z+2. \end{aligned}\right\}$$

Para encontrar las edades de Hugo, Paco y Luis debemos hallar los valores de x, y y z que satisfagan, de manera simultánea, las tres expresiones.

Algunos problemas requieren de realizar un dibujo o representación geométrica de la situación descrita, antes de intentar traducirla al lenguaje algebraico; si se desea, este tipo de ejemplos pueden consultarse en el libro de Silva Ochoa y Lazo de Sánchez (2008). Para concluir esta parte del texto demos un nombre a las expresiones encontradas en los ejemplos mostrados.

Definición 17. Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones llamadas miembros de la ecuación. En una ecuación hay símbolos conocidos, o que se suponen conocidos (normalmente representados por números), y otros símbolos que representan valores desconocidos o incógnitas, es decir, las variables.

Definición 18. Todo número que satisface una ecuación se llama **solución** de esta ecuación, es decir que dicho número convierte a la ecuación en una identidad.

Veamos cómo es posible hallar las soluciones en los ejemplos anteriormente planteados y el tipo de ecuaciones que tenemos.

3. 1. 3. ¿Cómo lo resuelvo?

Una sola ecuación

Definición 19. Una ecuación que tiene la forma $ax + b = 0$ se llama **ecuación lineal** en una variable.

Estrategia para la resolución de una ecuación lineal

Para resolver una ecuación lineal procederemos como se indica a continuación.

1. Sumar y restar términos en la igualdad, de tal manera que uno de los lados de esta quede igual a cero.
2. Realizar la reducción de términos semejantes hasta obtener una ecuación de la forma $ax + b = 0$.
3. Despejar la variable desconocida o incógnita, respetando las propiedades de adición y multiplicación. Es decir, si $a \neq 0$, entonces $x = -\frac{b}{a}$.

Resolvamos algunos de los ejemplos ya traducidos al lenguaje algebraico, vistos anteriormente.

► **Ejemplo**

Si el cuádruple de la edad de Juan (en años) *disminuido* en 11, es igual a la vigésima parte del año 2020, ¿cuál es la edad de Juan?

Anteriormente vimos que la expresión algebraica que describe al enunciado propuesto está dada por

$$4x - 11 = \frac{2020}{20}.$$

Pongamos esta expresión en la forma $ax + b = 0$, como sigue:

$$\begin{aligned} 4x - 11 - \frac{2020}{20} &= 0, \\ 4x - \frac{220 + 2020}{20} &= 0, \\ 4x - 112 &= 0. \end{aligned}$$

Así, la expresión tiene la forma deseada con $a = 4$ y $b = -112$. Como $a \neq 0$, entonces, de acuerdo al tercer paso para resolver una ecuación lineal, tenemos que

$$x = -\frac{-112}{4} = 28.$$

Por tanto, la edad de Juan es 28 años.

De manera coloquial, el despejar a la variable x en la ecuación lineal $ax + b = 0$ se puede entender como si b está sumando/restando, pasa del otro lado de la igualdad con la operación o signo contrario, es decir, $ax = -b$ y, en esta última igualdad, como a está multiplicando, entonces debe pasar dividiendo a todo lo que está del lado derecho de la igualdad, esto es $x = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a}$.

► Ejemplo

El cuádruple de la edad de Juan (en años) *disminuida* en 11 es igual a la vigésima parte del año 2020. ¿Cuál es la edad de Juan?

Para este enunciado vimos que la expresión algebraica que le describe está dada por $4(x-11) = \frac{2020}{20}$ o, equivalentemente,

$$4x - 44 = \frac{2020}{20}.$$

Pongamos esta expresión en la forma $ax + b = 0$ para resolverla de acuerdo con los tres pasos descritos anteriormente.

$$\begin{aligned} 4x - 44 &= \frac{2020}{20}, \\ 4x - 44 - \frac{2020}{20} &= 0, \\ 4x - \frac{880 + 2020}{20} &= 0, \\ 4x - 145 &= 0. \end{aligned}$$

Así, despejando a x tenemos que

$$x = \frac{145}{4} = 36 + \frac{1}{4}.$$

Por tanto, como el número obtenido no es un entero, pero se nos pide la edad de Juan en años, tenemos que es de 36 años (aún cuando esta cantidad no sea la solución a la ecuación).

En las soluciones de los ejemplos anteriores notamos que, aunque los dos problemas tienen solución, una de ellas debe ajustarse al contexto del problema (la edad en años).

Una ecuación lineal especial: regla de tres

El cálculo de proporcionalidad y/o porcentajes es un problema común que suele presentarse. La resolución de estos tipos de problemas se basa en plantear una regla de tres cuya resolución equivale a resolver una ecuación lineal.

Definición 20. La **regla de tres** consiste en resolver problemas de proporcionalidad en los cuales hay una incógnita y tres valores dados, relacionados con ella.

► **Ejemplos**

1. Si un auto puede viajar 200 km con 25 litros de gasolina, ¿cuánto podrá recorrer con un tanque lleno si este tiene capacidad de 40 litros?

   Primero, notemos que existe una razón entre dos de las cantidades conocidas, esto es $\frac{200}{25} \frac{\text{km}}{\text{litros}}$. Llamemos x a nuestra incógnita, es decir, al número de kilómetros que el auto puede recorrer con 40 litros. Entonces, existe una razón dada por
   $$\frac{x}{40} \frac{\text{km}}{\text{litros}}.$$
   De esta manera, tenemos la regla de tres generada al igualar estas razones, es decir, $\frac{200}{25} = \frac{x}{40}$; notemos que esta igualdad es una ecuación lineal cuya solución está dada por
   $$x = \frac{200}{25}(40) = 320 \text{ km}.$$

2. En un jardín se sembraron 45 matas de margaritas, si estas representan el $18\,\%$ de las flores plantadas, ¿cuántas matas se sembraron de otro tipo de flor?

   A partir de los datos que se nos dan sobre las matas de margaritas, tenemos la razón $\frac{45}{18}$. Sea x el total de matas sembradas, entonces x representa el $100\,\%$ y, en consecuencia, tenemos la razón $\frac{x}{100}$. Así, la regla de tres generada por igualar estas razones, ambas en $\frac{\text{matas}}{\text{porcentaje}}$, será
   $$\frac{45}{18} = \frac{x}{100}.$$
   Por tanto, al resolver esta ecuación lineal obtenemos que
   $$x = \frac{45}{18}(100) = 250 \text{ matas sembradas.}$$
   Por lo que se sembraron $250 - 45 = 205$ matas de otro tipo de flor.

Veamos ahora cuál es el procedimiento para resolver problemas que involucran más de una variable.

3. 1. 4. Dos o más ecuaciones

Definición 21. Una ecuación que tiene la forma $ax + by = c$ se llama **ecuación lineal** en dos variables. Un **sistema de ecuaciones lineales** consiste de dos o más ecuaciones que se tienen que satisfacer de forma simultánea. En el caso de un sistema de dos ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

estas deben ser satisfechas por los mismos valores para x y y.

Existen distintos métodos de solución entre los que se encuentran:

- Sustitución,
- suma y resta,
- igualación.

Método por sustitución

Definición 22. Dado un sistema de dos ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Este método de solución **por sustitución** consiste en despejar la variable de nuestra elección de **una** de las ecuaciones y sustituirla en la otra ecuación de tal suerte que, al hacer las operaciones de suma algebraica, obtengamos una ecuación lineal en una variable. Una vez que resolvemos esta ecuación, el valor obtenido lo sustituímos en el despeje inicial.

Resolvamos algunos de los ejemplos vistos anteriormente.

► **Ejemplo**

El número de caramelos que tiene Carlos es tres veces el que tiene Carla. Si cada uno de ellos recibe dos caramelos más, el total de caramelos será 8, ¿cuántos caramelos tienen originalmente Carlos y Carla?

Recordemos que el sistema de ecuaciones que debemos resolver está dado por

$$\left.\begin{aligned} y &= 3x, \\ (y+2) + (x+2) &= 8, \end{aligned}\right\}$$

donde x es el número de caramelos de Carla y y el de Carlos. De la primera ecuación podemos notar que una de las variables (y) está despejada en términos de la otra (x), por lo que ya no es necesario despejar y, simplemente, sustituimos dicha ecuación en la segunda para obtener $(3x + 2) + (x + 2) = 8$ o, equivalentemente, $4x - 4 = 0$, que es una ecuación lineal en una variable, cuya solución es $x = 1$. Una vez que tenemos el valor de una de las variables, en este caso x, sustituimos en la ecuación $y = 3x$, y obtenemos que $y = 3$. Por tanto, Carlos tiene 3 caramelos mientras que Carla tiene solo 1.

El siguiente ejemplo muestra que el método se puede generalizar para sistemas de más de dos ecuaciones.

► **Ejemplo**

Las edades de Hugo, Paco y Luis suman 18; la edad de Luis es el triple de la de Hugo y, en un año, la suma de las edades de Hugo y Paco será igual a la edad que Luis tendrá dentro de dos años. ¿Cuáles son las edades actuales de Hugo, Paco y Luis?

Recordemos que el sistema de ecuaciones que debemos resolver está dado por

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 18, \\ z &= 3x, \\ (x+1)+(y+1) &= z+2, \end{aligned}\right\}$$

donde x es la edad de Hugo, y la de Paco y z la de Luis. Como la segunda ecuación ya tiene despejada a z, en términos de x, utilizamos esta para sustituirla en las otras dos ecuaciones, obteniendo un nuevo sistema dado por

$$\left.\begin{aligned} x+y+(3x) &= 18, \\ (x+1)+(y+1) &= (3x)+2, \end{aligned}\right\}$$

o, equivalentemente,

$$\left.\begin{aligned} 4x+y &= 18, \\ -2x+y &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Para continuar resolviendo, debemos despejar alguna de las variables x o y de una de las ecuaciones de este nuevo sistema, y sustituirla en la ecuación restante. De la segunda ecuación tenemos que $y = 2x$, por lo que, sustituyendo en la primera, obtenemos la ecuación lineal en una variable

$$4x + (2x) = 18.$$

De donde $x = 3$ y, como $y = 2x$, entonces $y = 6$ y, debido a que $z = 3x$, se tiene que $z = 9$.

Por tanto, las edades de Hugo, Paco y Luis son $3, 6$ y 9 años, respectivamente.

En los ejemplos anteriores, una de las variables ya estaba expresada desde el planteamiento algebraico, en términos de alguna otra variable; sin embargo, esto no tiene por qué ser así. En tal caso, se escoje una ecuación para despejar una de las variables y el resultado se sustituye en las ecuaciones restantes hasta obtener una ecuación lineal en una variable.

Método de suma y resta

Definición 23. El método de **suma y resta** consiste en sumar o restar las ecuaciones involucradas en el sistema de ecuaciones, de forma tal que una de las variables sea eliminada. En este sentido, las ecuaciones deben estar escritas en la forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

y se suman, por un lado, los lados izquierdos de la igualdad y, por el otro, los valores numéricos del lado derecho.

Algunas veces los valores de a_1, b_1, a_2 y b_2 serán tales que, al sumar o restar las ecuaciones, ninguna de las variables se elimine en forma inmediata; en tal caso se debe hallar un sistema equivalente de ecuaciones.

Resolvamos los siguientes ejemplos utilizando el método de suma y resta.

▶ Ejemplos

1. Andrea y Alejandra han juntado 60 lápices de colores, no se sabe qué cantidad aportó cada una pero se sabe que si Andrea hubiese puesto dos lápices más y Alejandra hubiese puesto el doble de los que aportó, entonces, habrían juntado un total de 77 lápices de colores. ¿Qué cantidad de colores aportó cada una?

   Llamemos x a la cantidad de colores que aporta Andrea y y a la cantidad que aporta Alejandra. Entonces, el sistema de ecuaciones que representa a las condiciones del problema está dado por:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 60, \\ (x+2) + 2y &= 77, \end{aligned}\right\}$$

   o, equivalentemente,

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 60, \\ x + 2y &= 75. \end{aligned}\right\}$$

   Notemos que si restamos las ecuaciones del último sistema obtenemos una nueva ecuación en la que la variable x no aparece. En efecto,

$$(x+y) - (x+2y) = 60 - 75,$$

   es decir, $-y = -15$, por tanto, $y = 15$ y, al sustituir este valor en cualquiera de las ecuaciones del sistema, por ejemplo, en la primera, obtenemos $x + 15 = 60$, es decir, $x = 45$.

   Por tanto, Andrea aporta 45 colores mientras que Alejandra únicamente 15.

2. El dígito de las unidades de un número de dos cifras supera en tres al dígito de las decenas. El doble de la suma de sus cifras reducido en 22, equivale al negativo del triple del dígito de las unidades. Hallar el número de dos cifras.

   Sean x y y los dígitos de las decenas y unidades del número que estamos buscando, si denotamos por n a dicho número, entonces, $n = (10)x + y$. Como el dígito de las unidades supera en tres al dígito de las decenas tenemos $y = x + 3$.
   Por otro lado, debido a que el doble de la suma de sus cifras reducido en 22, equivale al negativo del triple del dígito de las unidades, entonces $2(x+y) -$

$22 = -3y$. De esta manera, el sistema de ecuaciones que debemos resolver está dado por

$$\begin{cases} n = 10x + y, \\ y - x = 3, \\ 2x + 5y = 22. \end{cases}$$

Notemos que aunque se trata de un sistema de tres ecuaciones la primera requiere que encontremos los valores de x y y; por esta razón, nos enfocaremos en resolver el sistema

$$\begin{cases} y - x = 3, \\ 2x + 5y = 22. \end{cases}$$

Observemos que si sumanos o restamos las ecuaciones obtenemos una sola ecuación lineal en la que siguen apareciendo ambas variables, por lo que ahora no podemos proceder por este método de manera inmediata. Podemos resolver de dos maneras, explicaremos ambas para mostrar que el resultado no se ve alterado.

a) En el sistema

$$\begin{cases} y - x = 3, \\ 2x + 5y = 22, \end{cases}$$

notamos que si la primera ecuación tuviera un $-2x$ entonces, al sumar ambas ecuaciones, la varible x no aparecería en el resultado. Por tanto, podemos multiplicar **toda** la primera ecuación por 2 obteniendo el sistema equivalente

$$\begin{cases} 2y - 2x = 6, \\ 2x + 5y = 22. \end{cases}$$

Al sumar estas ecuaciones obtenemos $(2y - 2x) + (2x + 5y) = 6 + 22$ o, equivalentemente, $7y = 28$, de donde $y = 4$. Una vez que tenemos el valor de una de las variables podemos sustituir, en cualquiera de las ecuaciones, el valor encontrado de y para obtener x. En este caso, retomaremos la ecuación $y - x = 3$ para ver que, cuando $y = 4$, se requiere que $x = 1$.

b) En el sistema

$$\begin{cases} y - x = 3, \\ 2x + 5y = 22, \end{cases}$$

notamos que si la primera ecuación tuviera un $5y$, entonces, al restar ambas ecuaciones la varible y no aparecería en el resultado. Por tanto, podemos multiplicar **toda** la primera ecuación por 5 obteniendo el sistema equivalente

$$\begin{cases} 5y - 5x = 15, \\ 2x + 5y = 22. \end{cases}$$

Si ahora restamos nuestras ecuaciones obtenemos $(5y - 5x) - (2x + 5y) = 15 - 22$ o, equivalentemente, $-7x = -7$, de donde $x = 1$. Sustituyendo este valor en una de las ecuaciones originales, por ejemplo, $y - x = 3$, obtenemos $y - 1 = 3$, de donde $y = 4$.

Notemos que en ambos procedimientos hemos obtenido los mismos valores para las variables x y y, por lo que no importa cuál de los dos decidamos realizar. Finalmente, de los resultados obtenidos concluimos que el dígito de las decenas es $x = 1$ y el de las unidades es $y = 4$. Por tanto, el número que buscamos está dado por

$$n = 10x + y = 10(1) + 4 = 14.$$

En este último ejemplo se requirió buscar un “número adecuado” para que, al sumar o restar las ecuaciones del sistema, se elimine alguna de las variables involucradas: dicho número será el *mínimo común múltiplo* (mcm) entre los coeficientes de la variable que queremos eliminar. En efecto, para eliminar x consideramos $\mathrm{mcm}(-1, 2) = 2$, mientras que para eliminar y estimamos $\mathrm{mcm}(1, 5) = 5$.

Método de igualación

Definición 24. Dado el sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

El método de **igualación** consiste en despejar una de las variables en **ambas** ecuaciones e igualarlas, lo que nos llevará a obtener una ecuación lineal en una sola variable.

► Ejemplo

Consideremos el sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{cases} 5x + 6y = 16, \\ 2x - 3y = 1. \end{cases}$$

Hallar los valores de x y y.

Como no importa qué variable decidamos despejar, siempre y cuando sea la misma en ambas ecuaciones, despejemos y, esto es

$$\begin{aligned} 6y &= 16 - 5x, \\ y &= \frac{16 - 5x}{6}, \\ y &= \frac{8}{3} - \frac{5}{6}x. \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -3y &= 1 - 2x, \\ y &= \frac{1 - 2x}{-3}, \\ y &= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x. \end{aligned}$$

Igualando las dos expresiones obtenidas para y tenemos

$$\frac{8}{3} - \frac{5}{6}x = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x,$$

o equivalentemente $\frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}x + \frac{2}{3}x$, es decir, $3 = \frac{3}{2}x$, de donde

$$x = \frac{3}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{1}}{\frac{3}{2}} = \frac{6}{3} = 2.$$

Al sustituir este valor de x en cualquiera de los despejes encontrados para y nos da

$$y = \frac{8}{3} - \frac{5}{6}(2) = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} = 1.$$

Por lo tanto, $x = 2$ y $y = 1$.

Existe un cuarto método para resolver sistemas de ecuaciones: el **Método de Cramer**, el cual se basa en hallar la solución del sistema utilizando una herramienta matemática llamada **determinante**. Es un método que suele enseñarse en el primer semestre del bachillerato, por lo que no lo abordaremos en este material; sin embargo, el lector puede consultarlo en Aguilar Márquez *et al.* (2009).

3. 1. 5. Otro tipo de problemas: desigualdades

Definición 25. Una **desigualdad matemática** describe la relación que existe entre dos cantidades diferentes o entre dos expresiones algebraicas que, para cada valor de la variable, toman valores diferentes. Las desigualdades suelen identificarse con los símbolos *mayor*($>$), *menor* ($<$), *mayor o igual* ($\geq$) o *menor o igual* ($\leq$).

▶ **Ejemplos**

1. La desigualdad $4 > 3$ siempre se cumple.
2. La desigualdad $-4 < -10$ siempre es falsa.
3. Los números del conjunto $\{1, 2, 4\}$ son soluciones de la desigualdad $4x - 1 \geq 3$, en efecto:
   - Si $x = 1$, entonces $4x - 1 = 4(1) - 1 = 3$ y $3 = 3$, por tanto se cumple que $4x - 1 \geq 3$ para este valor de x.
   - Si $x = 2$, entonces $4x - 1 = 4(2) - 1 = 7$ y $7 > 3$, por tanto se cumple que $4x - 1 \geq 3$ para este valor de x.
   - Si $x = 3$, entonces $4x - 1 = 4(3) - 1 = 11$ y $11 > 3$, por tanto se cumple que $4x - 1 \geq 3$ para este valor de x.
4. La desigualdad $2x < 2y$ se cumple siempre que $x < y$.

Propiedades para desigualdades

Las siguientes propiedades pueden aplicarse para cualquier número real a, b o c y, aunque se utiliza el símbolo $>$, aplican para $\geq$ (respectivamente para $<$ y $\leq$)

1. Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.
2. Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$ y $a - c > b - c$.
3. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$ y $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
4. Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$ y $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

La primera propiedad se llama **propiedad transitiva**. La segunda se puede leer como *"Si en una desigualdad se suma o resta un número, en ambos lados, la desigualdad no se altera"*. La tercera y cuarta propiedades se pueden leer como *"Si en una desigualdad se multiplica o divide por un número, en ambos lados, la desigualdad no cambia de sentido si dicho número es positivo y sí lo cambia si el número es negativo"*.

Con ayuda de las propiedades anteriores es posible resolver desigualdades como las siguientes:

► Ejemplos

1. Hallar los valores enteros positivos de x, menores que 9, que satisfagan

$$2x - 5 > 15.$$

Como x es nuestra incógnita, intentaremos dejarla de un solo lado de la desigualdad, con coeficiente 1, es decir, vamos a despejarla. Primero sumemos 5 en ambos lados de la desigualdad, esto es

$$\begin{aligned} (2x - 5) + 5 &> 15 + 5, \\ 2x &> 20. \end{aligned}$$

Notemos que, como sumamos el mismo número en ambos extremos de la desigualdad, esta no cambia de sentido. Ahora, para concluir con nuestro despeje de x debemos dividir entre 2 y, como se trata de un número positivo, la desigualdad no cambiará de sentido. Así, obtenemos

$$x > \frac{20}{2} = 10.$$

Por tanto, los valores de x que verifican la desigualdad serán todos aquellos reales que sean mayores a 10; sin embargo, se nos solicitaron los enteros positivos y menores que 9. En consecuencia, la respuesta es: *no hay valores de x, enteros positivos y menores que 9 que satisfagan la desigualdad*

$$2x - 5 > 15.$$

2. Hallar los valores enteros negativos de x, mayores que -4, que satisfagan la desigualdad
$$2 - 3x \leq 2x + 22.$$
Para intentar despejar x restaremos en ambos lados $2x + 22$, es decir,
$$\begin{aligned}(2 - 3x) - (2x + 22) &\leq (2x + 22) - (2x + 22),\\ -20 - 5x &\leq 0.\end{aligned}$$
Observemos que esta última desigualdad es muy parecida a la del ejemplo anterior, por lo que podemos proceder de igual manera, esto es, sumemos 20 en ambos lados, obteniendo
$$\begin{aligned}(-20 - 5x) + 20 &\leq 0 + 20,\\ -5x &\leq 20,\end{aligned}$$
y ahora, para terminar de despejar a x debemos dividir entre -5; como se trata de un número negativo, la desigualdad va a cambiar de sentido, es decir,
$$x \geq \frac{20}{-5} = -4.$$
Así, los valores de x que satisfacen la desigualdad son todos los reales que sean mayores o iguales que -4. Por tanto, respondiendo la pregunta planteada tenemos que aquellos enteros negativos que son solución y que son mayores que -4 serán $-3, -2$ y -1.

3. Para qué enteros positivos se cumple
$$\frac{1}{5} < \frac{x}{2} \leq \frac{2}{3}.$$
Este tipo de desigualdades puede resolverse de dos formas:

   a) Trabajando la desigualdad en dos partes, primero para $\frac{1}{5} < \frac{x}{2}$ y luego para $\frac{x}{2} \leq \frac{2}{3}$. Resolviendo cada parte tenemos que $\frac{2}{5} < x$ y, por otra parte, $x \leq \frac{4}{3}$. Por tanto, conjuntando ambos resultados se tiene que
   $$\frac{2}{5} < x \leq \frac{4}{3}.$$

b) Considerando que el mínimo común múltiplo entre los denominadores es $\text{mcm}(5, 2, 3) = 30$ y multiplicando toda la desigualdad por dicho número, nos da

$$\frac{1}{5}(30) < \frac{x}{2}(30) \leq \frac{2}{3}(30),$$
$$6 < 15x \leq 20,$$
$$\frac{6}{15} < x \leq \frac{20}{15},$$

donde la última expresión se obtuvo dividiendo toda la desigualdad por 15 y, por tratarse de un número positivo, la desigualdad mantiene sus sentidos. Reduciendo las fracciones obtenidas tenemos

$$\frac{2}{5} < x \leq \frac{4}{3}.$$

En ambos casos se obtuvo la misma solución, por lo que la respuesta a la pregunta planteada es $x = 1$, que es el único entero positivo que satisface la cadena de desigualdades.

3. 1. 6. Sumas especiales

Algunas veces, las sumas algebraicas aparecen asociadas a colecciones de números que siguen cierto patrón.

Definición 26. Una **sucesión** es una lista de la forma

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

donde a_n es el término general o término n-ésimo. La sucesión se denota por $\{a_n\}$, siendo n un número natural.

► **Ejemplos**

1. La sucesión con el n-ésimo término $a_n = \frac{1}{n}$, se escribe como

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

2. La sucesión con el n-ésimo término $a_n = \frac{3n-1}{n}$, se escribe como

$$2, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \ldots, \frac{3n-1}{n}, \ldots$$

3. La sucesión con el n-ésimo término $a_n = x^n$, se escribe como

$$x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$$

Definición 27. Una de las operaciones más comunes que se puede realizar a las sucesiones es la suma de sus primeros n términos, esto es

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

la notación usual para estas sumas es utilizando la **notación sigma** o **símbolo suma**, $\sum$, de la siguiente manera:

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

3. 1. 7. Progresiones

Progresión aritmética o sucesión aritmética

Definición 28. La sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ es una **sucesión o progresión aritmética** si existe un número real r, tal que para todo número m se cumple que

$$a_m = a_{m-1} + r,$$

es decir, entre un elemento de la sucesión y el siguiente hay una diferencia con valor r, llamada **razón aritmética**, cumpliéndose que $r = a_m - a_{m-1}$.

► **Ejemplos**

Determina si las siguientes sucesiones son o no aritméticas.

1. La sucesión $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n$.

   Notemos que el término general de la sucesión es $a_n = 2n$ de donde

   $$r = a_m - a_{m-1} = 2m - 2(m-1) = 2m - 2m + 2 = 2.$$

   Por tanto, la sucesión es aritmética.

2. La sucesión $2, 5, 10, 17, \ldots, n^2 + 1$.

   Observemos que entre el segundo término y el primero hay una diferencia de 3, pero entre el tercero y el segundo, es de 5 unidades. Como no se trata de la misma cantidad, la sucesión no es aritmética.

   Podemos, además, calcular la diferencia entre dos términos consecutivos, para lo cual requerimos calcular $(m-1)^2$; para ello, recordemos la definición del producto de una variable por sí misma y la propiedad distributiva, esto es

   $$\begin{aligned}(m-1)^2 &= (m-1)(m-1)\\ &= [m(m-1)] - [m-1]\\ &= [(m \cdot m) - m] - [m-1]\\ &= m^2 - m - m + 1\\ &= m^2 - 2m + 1.\end{aligned}$$

De esta manera, al calcular la razón de la sucesión dada tenemos

$$\begin{aligned} r = a_m - a_{m-1} &= [m^2+1] - [(m-1)^2+1] \\ &= [m^2+1] - [(m^2-2m+1)+1] \\ &= [m^2+1] - [m^2-2m+2] \\ &= m^2+1-m^2+2m-2 \\ &= 2m-1. \end{aligned}$$

Por tanto, como el valor de r no es constante, la sucesión no es aritmética.

La expresión $(m-1)^2 = m^2-2m+1$ es uno de los llamados **productos notables**, los cuales serán definidos en la siguiente sección.

Suma de los primeros n términos

La suma de los primeros n términos de una progresión aritmética está dada por

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1+a_n)}{2}.$$

La fórmula anterior se obtiene sumando $S+S$, pero escribiendo el segundo sumando de atrás para adelante, es decir, desde el término a_n hasta el término a_1, en efecto

$$\begin{aligned} 2S =&[a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n] + [a_n+a_{n-1}+\cdots+a_3+a_2+a_1] \\ =& [a_1+(a_1+r)+(a_1+2r)+\cdots+(a_1+(n-2)r)+(a_1+(n-1)r)] \\ &+ [(a_1+(n-1)r)+(a_1+(n-2)r)+\cdots+(a_1+2r)+(a_1+r)+a_1] \\ =& \underbrace{[2a_1+(n-1)r]+[2a_1+(n-1)r]+\cdots+[2a_1+(n-1)r]}_{n \text{ veces}} \\ =&n[2a_1+(n-1)r], \end{aligned}$$

de donde

$$S = \frac{n}{2}\Big[2a_1+(n-1)r\Big] = \frac{n}{2}\Big[a_1+\big(a_1+(n-1)r\big)\Big] = \frac{n\,[a_1+a_n]}{2}.$$

► Ejemplo

Hallar la suma de los primeros 10 términos de la sucesión aritmética $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n$.

Los datos que tenemos son: $a_1 = 2$, $a_{10} = 2(10) = 20$ y $n = 10$; por tanto, sustituyendo en la fórmula para la suma de n términos en una progresión aritmética tenemos que

$$S = \sum_{k=1}^{10} 2k = \frac{10\,[2+20]}{2} = \frac{10\,(22)}{2} = (10)(11) = 110.$$

Suma de Gauss

La suma de los primeros n términos de la sucesión aritmética $a_k = k$ es

$$S = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,[a_n + a_1]}{2} = \frac{n\,[n+1]}{2}$$

y recibe el nombre de **Suma de Gauss** o **Fórmula de Gauss**.

► Ejemplos

Calcular las siguientes sumas:

1. $S = 3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 300.$
   Observemos que la suma solicitada se puede escribir como
   $$S = 3[1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100] = 3 \sum_{k=1}^{100} k.$$
   Así, utilizando la Fórmula de Gauss tenemos
   $$S = 3 \sum_{k=1}^{100} k = 3\left[\frac{100(101)}{2}\right] = 3\,[(50)(101)] = 15150.$$
2. $S = 4 - 8 + 12 - 16 + \cdots - 200.$
   Notemos que la suma solicitada se puede escribir como
   $$S = 4[1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - 50],$$
   por lo que basta encontrar la suma entre corchetes. Ahora
   $$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - 50 = (1 + 3 + \cdots + 49) - (2 + 4 + \cdots + 50).$$
   Las sumas entre corchetes son progresiones aritméticas, por lo que tenemos

- Para $1+3+5+\cdots+49$ tenemos que el término general está dado por $a_n = a_{n-1}+2$ para $n = 2,3,\ldots 25$ y $a_1 = 1$; entonces, utilizando la fórmula para la suma de progresiones aritméticas tenemos que

$$1+3+5+\cdots+49 = \frac{25[1+49]}{2} = (25)^2.$$

- Para $2+4+6+8+\cdots+50$ tenemos

$$2+4+6+\cdots+50 = 2(1+2+3+\cdots+25) = 2\left[\frac{25(26)}{2}\right] = 25(26),$$

donde la penúltima suma se calculó utilizando la suma de Gauss para $n = 25$.

Finalmente, retomando la suma original tenemos

$$\begin{aligned} S &= 4\Big[1-2+3-4+\cdots-50\Big] \\ &= 4\Big[(1+3+5+\cdots+49)-(2+4+6+8+\cdots+50)\Big] \\ &= 4\Big[(25)^2-(25)(26)\Big] \\ &= 4\Big[(25)(25-26)\Big] \\ &= 4\Big[(25)(-1)\Big] \\ &= -100. \end{aligned}$$

Progresión geométrica o sucesión geométrica

Definición 29. La sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ es una **sucesión o progresión geométrica** si para todo a_m que pertenezca a la sucesión existe una constante r, diferente de cero, tal que

$$a_m = a_{m-1}r,$$

es decir, entre un elemento de la sucesión y el siguiente se mantiene cierta proporción r, llamada **razón geométrica**, es decir, $r = \frac{a_m}{a_{m-1}}$.

► **Ejemplos**

Determina si las siguientes sucesiones son o no geométricas.

1. La sucesión $3, 6, 12, 24, \ldots, 3\cdot 2^{n-1}$.

   Notemos que la razón común está dada por

$$r = \frac{a_m}{a_{m-1}} = \frac{3\cdot 2^{m-1}}{3\cdot 2^{m-2}} = \frac{2\cdot 2^{m-2}}{2^{m-2}} = 2,$$

y, en efecto, un término de la sucesión es el doble de su antecesor. Por tanto, la sucesión es geométrica.

2. La sucesión $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$.

   Observemos que 3 es el triple de 1, pero 5 no lo es del 3; por tanto, parece no haber una razón geométrica entre los elementos de la sucesión. Veamos cómo es la razón en dos términos consecutivos en general:

$$r = \frac{a_m}{a_{m-1}} = \frac{2m-1}{2(m-1)-1} = \frac{2m-1}{2m-3},$$

   claramente este no es un valor numérico, por lo que la sucesión no es geométrica.

3. La sucesión $x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$, donde x representa un número real, distinto de cero.

   Veamos cuál es la razón de dos términos consecutivos arbitrarios:

$$r = \frac{a_m}{a_{m-1}} = \frac{x^m}{x^{m-1}} = \frac{x \cdot x^{m-1}}{x^{m-1}} = x,$$

   por tanto, se trata de una progresión geométrica con razón $r = x$, y x un número real distinto de cero.

Suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica

La suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica está dada por

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + ra_1 + ra_2 + \cdots + ra_{n-1} = a_1 \frac{1-r^n}{1-r},$$

siempre que r sea distinto de uno. Para el caso $r = 1$ la suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica equivale a

$$S = \underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + \cdots + a_1}_{n \text{ veces}} = na_1.$$

La fórmula para el caso $r \neq 1$ se obtiene de la resta $S - rS$, esto es

$$\begin{aligned}
S - rS =& \Big[a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n\Big] - \Big[ra_1 + ra_2 + \cdots + ra_{n-1} + ra_n\Big] \\
=& \Big[a_1 + ra_1 + \cdots + ra_{n-2} + ra_{n-1}\Big] - \Big[ra_1 + ra_2 + \cdots + ra_{n-1} + ra_n\Big] \\
=& a_1 - ra_n \\
=& a_1 - r^n a_1,
\end{aligned}$$

pues $ra_n = r[ra_{n-1}] = r[r(ra_{n-2})] = \cdots = r^{n-1}a_2 = r^n a_1$. Por tanto,

$$S(1-r) = a_1(1-r^n).$$

► Ejemplos

1. Calcular la suma $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^8}$.

   Notemos que
   $$S - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^8}$$
   y el lado derecho de esta igualdad es una sucesión geométrica con término general $a_n = \frac{1}{2^n}$, entonces
   $$r = \frac{a_m}{a_{m-1}} = \frac{\frac{1}{2^m}}{\frac{1}{2^{m-1}}} = \frac{2^{m-1}}{2^m} = \frac{2^{m-1}}{2 \cdot 2^{m-1}} = \frac{1}{2}.$$
   Por tanto, los datos que tenemos son
   $$r = \frac{1}{2},\ a_1 = \frac{1}{2},\ n = 8,$$
   y, en consecuencia
   $$S - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \frac{1}{2^8}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \frac{1}{2^8}}{\frac{1}{2}}\right) = 1 - \frac{1}{2^8}.$$
   Así, la suma solicitada es igual a
   $$S = 2 - \frac{1}{2^8}.$$

2. Calcular la suma $S = 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + 729 - 2187$.

   Agrupemos primero los términos negativos y los términos positivos, esto es
   $$\begin{aligned} S &= 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + 729 - 2187 \\ &= \Big[1 + 9 + 81 + 729\Big] + \Big[-3 - 27 - 243 - 2187\Big] \\ &= \Big[1 + 9 + 81 + 729\Big] - 3\Big[1 + 9 + 81 + 729\Big] \\ &= (1-3)\Big[1 + 9 + 81 + 729\Big] \\ &= -2\Big[1 + 9 + 81 + 729\Big]. \end{aligned}$$

Aunque la suma entre corchetes se puede calcular de forma directa, con la finalidad de utilizar la teoría de sucesiones observamos que dicha suma corresponde a la de los primeros cuatro términos de una suma geométrica de razón 9, donde $a_1 = 1$; por tanto

$$\Big[1 + 9 + 81 + 729\Big] = \frac{1 - 9^4}{1 - 9} = \frac{1 - 9^4}{-8},$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} S &= 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + 729 - 2187 = -2\Big[1 + 9 + 81 + 729\Big] \\ &= -2\frac{1 - 9^4}{-8} = \frac{1}{4}(1 - 9^4). \end{aligned}$$

3. Calcular la suma de la sucesión geométrica $x, x^2, x^3, \ldots, x^{15}$, donde x representa un número real, distinto de cero.

   En este caso x es la razón, es decir, no es un valor exacto; sabemos también que $a_1 = x$ y $n = 15$, por lo que la suma queda expresada como

$$S = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{15} = \begin{cases} 15, & \text{si } x = 1, \\ x\dfrac{1 - x^{15}}{1 - x}, & \text{si } x \neq 1. \end{cases}$$

4. Hallar los términos de una progresión geométrica que suma 364; su primer término es 1 y tiene razón $r = 3$.

   Al sustituir los datos $S = 364$, $a_1 = 1$ y $r = 3$, en la fórmula para la suma de n términos de una sucesión geométrica tenemos

$$\begin{aligned} 364 &= \frac{1 - 3^n}{1 - 3}, \\ 364 &= \frac{1 - 3^n}{-2}, \\ -728 &= 1 - 3^n, \\ -729 &= -3^n. \end{aligned}$$

   Como $729 = 3^6$, entonces $n = 6$ y así la progresión geométrica tiene 6 elementos y está dada por

$$1, 3, 9, 27, 81, 273.$$

3. 1. 8. Otras sumas especiales

Otro tipo de sumas especiales, no precisamente asociadas a sucesiones o progresiones, son las siguientes.

Definición 30. Una **suma telescópica** es aquella que obedece a alguno de los siguientes dos patrones:

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(a_k - a_{k+1}\Big) \qquad \text{o bien} \qquad \sum_{k=1}^{n}\Big(a_{k+1} - a_k\Big).$$

Las sumas telescópicas se caracterizan porque, al desarrollar la notación suma, los términos se van eliminando, quedando al final únicamente dos de ellos, esto es

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(a_k - a_{k+1}\Big) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}.$$

O bien

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(a_{k+1} - a_k\Big) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1.$$

► Ejemplos

1. Hallar la suma $S = \sum_{k=1}^{10}\Big((k+1)^2 - k^2\Big)$

   Notemos que la suma es telescópica, en efecto

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{10}\Big[(k+1)^2 - k^2\Big] \\ &= \Big[(2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + (4^2 - 3^2) + \cdots + (11^2 - 10^2)\Big] \\ &= -1^2 + 11^2 \\ &= 121 - 1 \\ &= 120. \end{aligned}$$

2. Hallar la suma $S = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

   Observemos que si extendemos la suma obtenemos

$$S = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)},$$

   que no parece ser fácil de simplificar, y tampoco parece una suma telescópica. Sin embargo, podemos verificar que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

por lo que la suma original se puede reescribir como

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]$$

que es telescópica, y cuyo resultado está dado por

$$S=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]=1-\frac{1}{n+1}.$$

Otras sumas especiales, además de la Fórmula de Gauss que representa la suma de los primeros n naturales, son las siguientes.

Suma de los primeros n cuadrados

La suma de los primeros n cuadrados consecutivos es igual a

$$S=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

Suma de los primeros n cubos

La suma de los primeros n cubos consecutivos es igual a

$$S=\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2.$$

Notemos que las sumas anteriores no son consecuencia de alguna progresión aritmética, geométrica y tampoco son resultado de una suma telescópica. La manera formal de probar que dichas fórmulas son correctas es mediante una prueba por **inducción**, la cual será explicada en la sección 5. 1. 4, correspondiente al principio de inducción matemática.

3. 1. 9. Productos especiales

Al hablar del producto de una misma variable por sí misma, se abordó el tema de *propiedades de los exponentes*. En este caso solo describiremos aquellas que se refieren a exponentes enteros; sin embargo, las correspondientes a exponentes fraccionarios pueden consultarse en Aguilar Márquez *et al.* (2009) y Lehmann (2004).

Definición 31. Si n es un número natural, el producto de n factores de un mismo número $x \in \mathbb{R}$ lo escribimos como

$$x^n=\underbrace{x\cdot x\cdots x}_{n\text{ factores}}$$

y decimos que x es la **base** y n el **exponente**.

La operación x^n se llama **potenciación** y cuando $n = 1$ se omite el exponente.

A continuación se presentan las propiedades de los exponentes enteros, las cuales pueden ser probadas con la definición anterior. Asimismo, se encuentran propiedades de los exponentes racionales y fraccionarios, los cuales, aunque no están relacionados directamente con el concepto de polinomio, pueden ser de utilidad cuando se trata de simplificar expresiones algebraicas.

Propiedades para exponentes enteros

Las siguientes propiedades pueden utilizarse para cualesquiera bases $x \neq 0$, $y \neq 0$ números reales y exponentes m, n enteros.

1. $x^0 = 1$.
2. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.
3. $(x^m)^n = x^{mn}$.
4. $(xy)^m = x^m \cdot y^m$.
5. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^m = \dfrac{x^m}{y^m}$.
6. $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$.
7. $\dfrac{1}{x^{-m}} = x^m$.

Es importante notar que la propiedad $x^0 = 1$ solo ocurre para $x \neq 0$.

▶ Ejemplos

1. Simplificar $\left(1\frac{1}{3}\right)^8 \left(\left(\frac{1}{4}\right)^4\right)^2$.

$$\left(1\frac{1}{3}\right)^8 \left(\left(\frac{1}{4}\right)^4\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^8 \left(\frac{1}{4}\right)^{4\cdot 2} = \left(\frac{4}{3}\right)^8 \left(\frac{1}{4}\right)^8$$
$$= \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4}\right)^8 = \left(\frac{1}{3}\right)^8 = \frac{1}{3^8}.$$

2. Hallar el valor de m si $(3^m)^2 = 3^8$.

   Observemos que del lado derecho de la igualdad se tiene un exponente entero, por lo que utilizando la propiedad 3 para exponentes enteros en la expresión del lado izquierdo obtenemos $3^{2m} = 3^8$ y, dado que ya se tienen las mismas bases, entonces la igualdad se cumplirá siempre y cuando los exponentes sean los mismos, es decir, $2m = 8$, por lo tanto $m = 4$.

Productos notables y factorización

Ciertos productos que ocurren con mucha frecuencia son llamados **productos notables**; tienen una forma específica, la cual no necesita ser verificada cada vez que se realiza dicho producto. Los más importantes son:

Producto notable	Fórmula	Resultado
Binomios conjugados	$(x-y)(x+y)=x^2-y^2$	Diferencia de cuadrados
	$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$	Trinomio general
Binomio al cuadrado	$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$	Trinomio cuadrado perfecto

En los ejemplos asociados a la definición 16 se verificó un ejemplo particular de trinomio general, y en el ejemplo de la definición 28 se utilizó y verificó un trinomio cuadrado perfecto.

Los resultados de los productos notables tienen nombres específicos, pero pueden entenderse como un mismo objeto algebraico llamado polinomio.

Definición 32. Un **polinomio** $P(x)$ en una variable es una expresión de la forma

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

donde $a_0,\ldots,a_n$ son constantes y $n\in\mathbb{N}$. A cada sumando lo llamaremos **monomio** o **término**. Las constantes a_i se conocen como los **coeficientes** del polinomio.

Si $a_n\neq 0$ decimos que el polinomio tiene grado n. El número a_0 es el **término constante**. Si $a_n=1$, decimos que el polinomio es **mónico**. Denotamos por $grad(P)$ al grado de $P(x)$.

Definición 33. Al proceso de expresar un polinomio como un producto de dos o más factores, con respecto a un sistema de números, se le llama **factorización**. Entre las formas más comunes para factorizar se encuentran:

- Factor común
- Agrupamiento
- Fórmulas asociadas a los productos notables:
  - Diferencia de cuadrados.
  - Trinomio general.
  - Trinomio cuadrado perfecto.

► Ejemplos

Las siguientes factorizaciones se realizan utilizando las fórmulas mencionadas:

1. $x^4-x^2=x^2(x^2-1)=x^2(x+1)(x-1)$
2. $xy^2-2x^2y+x^3=x(y^2-2xy+x^2)=x(y-x)^2$
3. $2ab^2x^2-4ab^2xy+6a^2b^2y^2=2ab^2(x^2-2xy+3ay^2)$
4. $3x^2-6x+4x-8=3x(x-2)+4(x-2)=(3x+4)(x-2)$
5. $(5a-2b)^2-(3a-7b)^2$

$$= [(5a - 2b) - (3a - 7b)] [(5a - 2b) + (3a - 7b)]$$
$$= (2a + 5b) (8a - 9b)$$

6. $a^6 - 6a^3 + 9 = (a^3)^2 - 2(3)(a^3) + (3)^2 = \left(a^3 - 3\right)^2$

Definición 34. Un cero de un polinomio $P(x)$ es un número r, tal que $P(r) = 0$. Cuando $P(r) = 0$ también decimos que r es una **raíz** o una **solución** de la ecuación $P(x) = 0$.

Notemos que factorizar un polinomio nos ayuda a determinar sus raíces o ceros, lo cual es uno de los problemas fundamentales del álgebra. Este problema equivale a resolver ecuaciones del tipo $P(x) = 0$, donde $P(x)$, en nuestro caso, es un polinomio.

► **Ejemplo**

Hallar las raíces del polinomio $x^4 - x^2$.

En el ejemplo anterior vimos que la factorización es $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x + 1)(x - 1)$, por lo que las raíces son los valores de x que satisfacen $x^2(x + 1)(x - 1) = 0$, esto es

$$x = 0,\ x = -1 \quad \text{y} \quad x = 1.$$

Existen muchas más herramientas algebraicas para traducir y resolver problemas reales o totalmente algebraicos, como los relacionados con polinomios; sin embargo, la finalidad de este texto es presentar los conceptos y herramientas generales que suelen utilizarse en los concursos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB).

3.2. Problemas de álgebra, nivel 1

Los problemas que se presentan a continuación formaron parte de los exámenes eliminatorios de la OMMEB en Veracruz. Para poder identificarlos se les ha asignado una notación como la siguiente: **5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P3**; lo anterior significa que dicho ejercicio corresponde a la 5.^{a} OMMEB de Veracruz, del Nivel 1, del Examen selectivo 2, Problema 3. En el caso de los problemas correspondientes a la 2.^{a} OMMEB se omite el número de examen y el nivel, puesto que se utilizó solo un examen selectivo para todos los niveles.

El nivel 1 en la OMMEB refiere a cuarto y quinto grados de primaria.

3. 2. 1. Preguntas de opción múltiple

Problema 3.1. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E1, P2). El año pasado Manuel presentó cuatro exámenes en su curso de matemáticas y obtuvo el $60\,\%$ de aciertos en el primer examen, de 30 preguntas; el $70\,\%$ en el segundo, de 10 preguntas; el $80\,\%$ en el tercero, de 30 preguntas; y $90\,\%$ en último, de 60 preguntas. ¿Cuál fue el porcentaje de aciertos que Manuel obtuvo de todos los problemas?

(a) $70\,\%$

(b) $75\,\%$

(c) $82\,\%$

(d) $86\,\%$

(e) Ninguna de las anteriores

Problema 3.2. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E1, P3). Si en una granja 2 vacas producen 30 litros de leche en 4 días, a esta misma tasa de producción, ¿cuántos litros de leche producirán x vacas en y días?

(a) $\frac{15\cdot x\cdot y}{4}$

(b) $\frac{4}{15\cdot x\cdot y}$

(c) $15\cdot x\cdot y$

(d) $60\cdot x\cdot y$

(e) Ninguna de las anteriores

Problema 3.3. (5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E1, P2). Esteban tiene una tienda de pasteles, los cuales distribuye entre sus clientes de lunes a viernes. La semana pasada vendió 1000 pasteles el lunes; el martes vendió $20\,\%$ más que el lunes; el miércoles vendió $30\,\%$ más que el martes; el jueves vendió $40\,\%$ más que el miércoles; y el viernes vendió $50\,\%$ más que el jueves. ¿Cuántos pasteles vendió Esteban la semana pasada?

(a) 2400 pasteles

(b) 3276 pasteles

(c) 6400 pasteles

(d) 9220 pasteles

(e) Ninguna de las anteriores

Problema 3.4. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P2). Hugo tiene una canica más que las que tiene Paco, quien cuenta con una canica más que las que tiene Luis. Hugo solo tiene canicas verdes, mientras que Paco y Luis solo cuentan con canicas amarillas. ¿Cuántas canicas pueden sumar en total Hugo, Paco y Luis?

(a) 22 canicas

(b) 53 canicas

(c) 67 canicas

(d) 69 canicas

(e) Ninguna de las anteriores

Problema 3.5. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P3). ¿Cuántas fracciones reducidas hay entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{3}$, tales que tienen denominador 15?

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

(e) Ninguna de las anteriores

Problema 3.6. (5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P1). A una jarra se le vierte agua hasta la quinta parte de su capacidad y pesa $560\ \mathrm{g}$. A la misma jarra se agrega más agua hasta completar cuatro quintas partes de su capacidad y pesa $740\ \mathrm{g}$. ¿Cuánto pesa la jarra vacía?

(a) $60\ \mathrm{g}$

(b) $180\ \mathrm{g}$

(c) $300\ \mathrm{g}$

(d) $500\ \mathrm{g}$

(e) Ninguna de las anteriores

Problema 3.7. (5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E3, P2). Angelina eligió dos enteros positivos y los utilizó para escribir una fracción. Después borró el numerador y lo incrementó en $40\,\%$. ¿En qué porcentaje se debe reducir el denominador para que la nueva fracción sea el doble de la inicial?

(a) $10\,\%$

(b) $20\,\%$

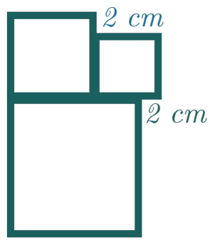
(c) $30\,\%$

(d) $40\,\%$

(e) Ninguna de las anteriores

3. 2. 2. Preguntas abiertas

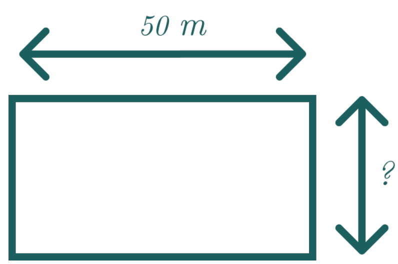
Problema 3.8. (2.^{a} OMMEB-Ver., P5). En la figura hay 3 cuadrados. La longitud del lado del cuadrado más pequeño es $6\ \mathrm{cm}$. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado más grande?



Problema 3.9. (2.^{a} OMMEB-Ver., P14). Para armar 300 llaveros trabajan 4 personas durante 9 horas. ¿En cuánto tiempo arman los mismos 300 llaveros 6 personas?

Problema 3.10. (2.^{a} OMMEB-Ver., P15). Armando, Daniele y Joaquín fueron de compras. Daniele gastó solamente el $15\,\%$ de lo que gastó Joaquín. Sin embargo, Armando gastó $60\,\%$ más que Joaquín. Juntos gastaron $\$5,500$. ¿Cuánto gastó Armando?

Problema 3.11. (2.^{a} OMMEB-Ver., P16). Miguel y Tere deciden jugar una carrera. Miguel corre alrededor del perímetro de la alberca que se muestra en la figura, mientras que Tere nada a lo largo de ella. Miguel corre tres veces más rápido que lo que nada Tere, quien nadó seis veces la longitud de la alberca en el mismo tiempo en que Miguel corrió cinco veces alrededor de la misma. ¿Cuál es el ancho de la alberca?



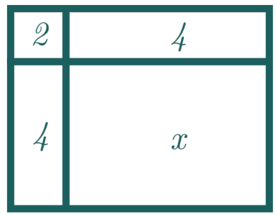
Problema 3.12. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E1, P8). La suma de las edades de un grupo de niños es 36. En dos años la suma de las edades será 60. ¿Cuántos niños hay en el grupo?

Problema 3.13. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P5). Una maestra reparte dulces en un grupo de cinco niños: Esteban, Iván, Brenda, Ulises y María. A Esteban le dio cierta cantidad de dulces, a Iván le entregó el doble de los dulces que le dio a Esteban, mientras que a Brenda le regaló el triple que a Esteban; a Ulises le otorgó la mitad que a Brenda y, por último, a María le proporcionó un cuarto de la cantidad que le dio a Iván. Si la maestra tenía 80 dulces, ¿cuántos dulces le tocó a cada uno de los niños?

Problema 3.14. (5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P7). Don Francisco tiene una cuenta en un banco con cierta cantidad de dinero. Después del primer año, se percató de que su cuenta disminuyó en un $20\,\%$, al segundo aumentó en un $5\,\%$, al tercer año disminuyó en un $10\,\%$ y al cuarto aumentó en un $25\,\%$. Al cabo de estos cuatro años, ¿cuánto disminuyó o aumentó la cuenta de Don Francisco respecto a la cantidad inicial?

Problema 3.15. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E3, P2). Para alimentar a su canario Ulises compró una bolsa de alpiste. La primera semana el canario comió $\frac{1}{2}$ del contenido original de la bolsa. La segunda semana comió $\frac{1}{3}$ de la cantidad original y la tercera comió $\frac{1}{4}$ del sobrante. ¿Qué fracción queda del total del contenido de la bolsa?

Problema 3.16. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E3, P5). En la figura aparece un rectángulo que Ulises ha dividido en cuatro rectángulos más pequeños. Si el número que aparece dentro de los rectángulos pequeños representa el valor de su correspondiente perímetro, determina el valor de x.



Problema 3.17. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E4, P1). Una cubeta contiene agua hasta la mitad de su capacidad. Cuando Cecilia le agrega dos litros, la cubeta registra tres cuartos de su capacidad. ¿Cuál es la capacidad total de la cubeta?

Problema 3.18. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E4, P5). ¿Cuál es el dígito de las decenas del número que resulta de la siguiente resta?

$$20^{21} - 22.$$

Observación. El símbolo n^k significa elevar el número n al exponente k, es decir,

$$n^k = \underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{k \text{ veces}}.$$

Problema 3.19. (5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E4, P1). En el puesto de frutas de Francisco, 3 plátanos cuestan tanto como 2 manzanas, mientras que 6 manzanas cuestan igual que 4 naranjas. ¿Cuántas naranjas cuestan lo mismo que 18 plátanos?

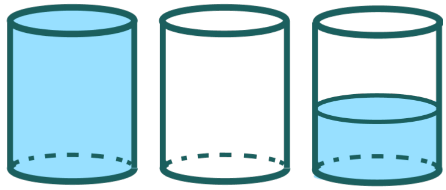
3.3. Problemas de álgebra, nivel 2

Los problemas que se presentan a continuación formaron parte de los exámenes eliminatorios de la OMMEB en Veracruz. Para poder identificarlos se les ha asignado una notación como la siguiente: **5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E2, P3**; lo anterior significa que dicho ejercicio corresponde a la 5.^{a} OMMEB de Veracruz, del Nivel 2, del Examen selectivo 2, Problema 3.

El nivel 2 en la OMMEB refiere a sexto grado de primaria y primer año de secundaria.

3. 3. 1. Preguntas de opción múltiple

Problema 3.20. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E1, P1). Un recipiente de vidrio lleno de líquido pesa 400 g. Cuando está vacío pesa 100 g. ¿Cuánto pesa cuando está a la mitad?



(a) 150 g

(b) 200 g

(c) 225 g

(d) 250 g

(e) 300 g

Problema 3.21. (5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E1, P1). En una tienda venden dulces de limón a 3 pesos y de fresa a 2 pesos. Ulises compró cierta cantidad de dulces de cada sabor; sin embargo, el señor de la tienda le dio la cantidad de dulces de limón que correspondía a los de fresa y viceversa, además de que pagó en total 62 pesos. De la bolsa sacó tres dulces al azar, dos de los cuales eran de limón, y después de eso en la bolsa quedó la misma cantidad de dulces de limón que de fresa. ¿Cuánto hubiera pagado Ulises de más, o de menos, si le hubieran dado las cantidades correctas?

(a) Hubiera pagado un peso menos

(b) Hubiera pagado lo mismo

(c) Hubiera pagado un peso más

(d) Hubiera pagado tres pesos más

(e) Ninguna de las anteriores

Problema 3.22. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E2, P3). Ulises puede hacer un trabajo en cuatro horas y Marichuy la misma tarea la cumple en cinco horas. Ellos deciden realizar el trabajo entre los dos. Al cabo de dos horas de laborar juntos, Ulises pide permiso para ausentarse y regresa después de una hora, mientras Marichuy continúa sin descanso. ¿En qué momento terminan el trabajo?

(a) Marichuy termina el trabajo 10 minutos después de que se ausenta Ulises

(b) Marichuy finaliza 30 minutos después de que se va Ulises

(c) Marichuy termina 45 minutos después de que se ausenta Ulises

(d) Marichuy y Ulises concluyen el trabajo antes de las dos primeras horas

(e) Marichuy y Ulises terminan 10 minutos después de que Ulises regresa

Problema 3.23. (4.^{a} OMMEB-Ver., N2, E2, P2). ¿Cuál de las siguientes desigualdades es cierta?

(a) $6^{30} > 36^{10} > 216^{6}$

(b) $36^{10} > 216^{6} > 6^{30}$

(c) $216^{6} > 36^{10} > 6^{30}$

(d) $216^{6} > 6^{30} > 36^{10}$

(e) Ninguna de las anteriores

3. 3. 2. Preguntas abiertas

Problema 3.24. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E1, P9). Juana estuvo lanzando un balón a la canasta de basquetbol. Después de 20 lanzamientos había encestado $55\,\%$ de las veces. Tras 5 lanzamientos aumentó a $56\,\%$ su proporción de aciertos. ¿En cuántos de esos 5 últimos tiros acertó?

Problema 3.25. (4.^{a} OMMEB-Ver., N2, E1, P9). Carmen hornea 48 galletas en su panadería. Por la mañana vende la mitad de las galletas a 25 pesos cada una. Por la tarde vende dos terceras partes de las que le quedan a mitad de precio, porque ya no están recién horneadas. Finalmente, por la noche vende las galletas sobrantes a 10 pesos cada una. Si Carmen gasta 7.50 pesos en cada galleta, ¿cuál es su ganancia al término del día?

Problema 3.26. (5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E1, P4). Ulises, Esteban e Iván presentaron un examen de historia que consistía en 30 preguntas. Ulises respondió correctamente $20\,\%$ menos que las preguntas que respondió bien Esteban, e Iván respondió acertadamente $45\,\%$ más preguntas que lo hecho por Esteban. Si entre los tres tuvieron 65 respuestas correctas, ¿cuántos aciertos tuvieron cada uno de ellos?

Problema 3.27. (5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E2, P4). Un examen tiene 20 preguntas. Para calcular la calificación, por cada respuesta correcta se suman 7 puntos, mientras que por cada incorrecta se quitan 4 puntos. Las respuestas en blanco no aportan puntos a la cuenta. Guadalupe sacó 100 puntos en el examen. ¿Cuántas preguntas dejó en blanco?

Problema 3.28. (4.^{a} OMMEB-Ver., N2, E3, P4). ¿Cuántas fracciones reducidas hay entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$ que tengan numerador 7?

Problema 3.29. (4.^{a} OMMEB-Ver., N2, E3, P5). El número 3600 se puede escribir como

$$2^{a} \times 3^{b} \times 4^{c} \times 5^{d},$$

donde a, b, c y d son enteros positivos. Si $a + b + c + d = 7$, ¿cuánto vale c?

Problema 3.30. (4.^{a} OMMEB-Ver., N2, E4, P1). El día de hoy, el producto de las edades de Ulises y su papá es 1590. Si ellos no tienen edades mayores a 100, ¿en qué año nació Ulises?

Problema 3.31. (4.^{a} OMMEB-Ver., N2, E4, P5). ¿Cuál es el dígito de las decenas del número que resulta de la siguiente resta?

$$2020^{2021} - 2022.$$

Problema 3.32. (5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E4, P1). La edad de Tomás es T años, que también es la suma de las edades de sus tres hijos. Si su edad hace N años era el doble de la suma de las edades de ellos (en ese tiempo), entonces ¿cuál es el valor de $\frac{T}{N}$?

3.4. Problemas de álgebra, nivel 3

Los problemas que se presentan a continuación formaron parte de los exámenes eliminatorios de la OMMEB en Veracruz. Para poder identificarlos se les ha asignado una notación como la siguiente: **5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E2, P3**; lo anterior significa que dicho ejercicio corresponde a la 5.^{a} OMMEB de Veracruz, del Nivel 3, del Examen selectivo 2, Problema 3.

El nivel 3 en la OMMEB refiere al segundo año de secundaria.

3. 4. 1. Preguntas de opción múltiple

Problema 3.33. (3.^{a} OMMEB-Ver., N3, E1, P4). Un tren está formado por 18 vagones. En total hay 700 pasajeros a bordo, pero se sabe que en cada cinco vagones consecutivos hay exactamente 199 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros en total hay en los dos vagones que están en el centro del tren?

(a) 70

(b) 77

(c) 78

(d) 96

(e) 103

Problema 3.34. (5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E1, P2). En una tienda venden dulces de sabor limón a 3 pesos, de fresa a 2 pesos y de menta a un peso. Ulises entró y pidió cierta cantidad de cada tipo, pero el señor de la tienda se confundió y le dio la cantidad solicitada de dulces de limón en dulces de menta, los pedidos de fresa se los cambió por limón y los de menta se los dio de fresa. Al final pagó 127 pesos; pero, si Ulises hubiera recibido la cantidad correcta de cada sabor, hubiera pagado 28 pesos más. Cuando sacó dos dulces de la bolsa, ambos eran de fresa, y en la bolsa quedó la misma cantidad de dulces de fresa que la suma de los de limón y de menta. ¿Cuántos dulces de fresa le dio el señor de la tienda a Ulises?

(a) 36

(b) 41

(c) 47

(d) 50

(e) Ninguna de las anteriores

Problema 3.35. (3.^{a} OMMEB-Ver., N3, E2, P3). ¿Cuántas parejas de números enteros (a, b) hay?, tales que satisfacen la siguiente ecuación

$$a^2 - b^2 = 2019.$$

(a) Solo una pareja

(b) Dos parejas

(c) Cuatro parejas

(d) Una infinidad

(e) Ninguna de las opciones anteriores

Problema 3.36. (4.^{a} OMMEB-Ver., N3, E2, P3). ¿Cuál de las siguientes desigualdades es cierta?

(a) $30^{39} > 15^{80} > 6^{78}$

(b) $15^{80} > 6^{78} > 30^{39}$

(c) $6^{78} > 15^{80} > 30^{39}$

(d) $15^{80} > 30^{39} > 6^{78}$

(e) Ninguna de las anteriores

Problema 3.37. (4.^{a} OMMEB-Ver., N3, E3, P3). Encuentra la posición (fila y columna) en la que se ubica el número 2020 en el siguiente arreglo infinito, en donde se asientan todos los números enteros positivos.

Observación. Por ejemplo, el 14 se encuentra en la fila 2 y columna 4.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \ldots \\ 2 & 5 & 9 & 14 & \ddots & \\ 4 & 8 & 13 & \ddots & & \\ 7 & 12 & \ddots & & & \\ 11 & \ddots & & & & \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

(a) Fila 4 y columna 60

(b) Fila 60 y columna 4

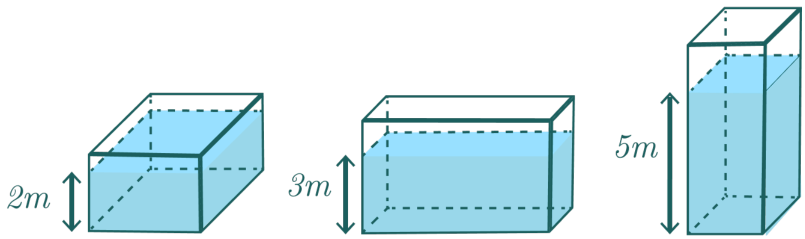
(c) Fila 4 y columna 61

(d) Fila 61 y columna 4

(e) Ninguna de las anteriores

3. 4. 2. Preguntas abiertas

Problema 3.38. (3.^{a} OMMEB-Ver., N3, E1, P9). Un contenedor en forma de caja rectangular se llena parcialmente con 120 metros cúbicos de agua. La profundidad del agua es $2\ \mathrm{m}$, $3\ \mathrm{m}$ o $5\ \mathrm{m}$, dependiendo de cuál base de la caja se pone en el piso, como se muestra en el esquema (sin escala). ¿Cuál es el volumen del contenedor?



Problema 3.39. (5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E1, P6). Consideremos el conjunto de números enteros positivos $\mathcal{A}$, tales que los dígitos que conforman a estos números son todos diferentes de cero y que la suma de ellos es 2021. Si n es el número más pequeño del conjunto $\mathcal{A}$ y m es el más grande, ¿cuánto vale la suma de los dígitos del número $(m-1)-(n+1)$?

Problema 3.40. (5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E2, P6). Marichuy tiene un pizarrón lo suficientemente grande para escribir una lista de números de la siguiente forma: el 1, tres veces, el 2, seis veces y así sucesivamente; el número k lo escribe $3k$ veces, pero al llevar escritos 500 números se acaba el espacio en el pizarrón. Encuentra el valor de la suma de todos los números que escribió Marichuy.

Problema 3.41. (5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E3, P4). Ulises y Belén tienen tres tarjetas y en cada una de ellas está escrito un número. En el reverso de las tarjetas de Ulises aparecen las letras A, B y C. Belén le muestra los números de sus tarjetas, en donde aparecen: 2, 3 y 4. Antes de que Ulises revele los números de sus tarjetas, realiza las siguientes operaciones con cada uno de los números de ella: suma el producto del cuadrado del número de Belén, por el número que aparece en la tarjeta A, al resultado suma el número de Belén por el número de la tarjeta B y, finalmente, a lo anterior suma el número que aparece en la tarjeta C; los resultados obtenidos fueron 11, 18 y 27, respectivamente. Con esta información Belén deduce los números en las tarjetas de Ulises. ¿Cuáles son los valores de los números en las tarjetas A, B y C?

Problema 3.42. (3.^{a} OMMEB-Ver., N3, E4, P2). María y Luisa compitieron en la resolución de una lista de 100 problemas. Algunos de ellos no fueron resueltos por ninguna, pero otros los solucionaron las dos. Por cada problema resuelto, la primera en hacerlo obtuvo cuatro puntos y, en caso que lo hubieran hecho las dos, la segunda obtuvo solo un punto. Si cada una de ellas resolvió 60 problemas de la lista y entre las dos lograron 312 puntos, ¿cuántos problemas solucionaron en común?

Problema 3.43. (3.^{a} OMMEB-Ver., N3, E4, P3). Al final de un día de ventas, Mariana y Ricardo juntaron el dinero que ganó cada uno y se lo repartieron en partes iguales. Haciendo esto, Ricardo perdió un $30\,\%$ del dinero que había ganado. ¿Qué porcentaje obtuvo Mariana?

Problema 3.44. (3.^{a} OMMEB-Ver., N3, E4, P7). La báscula de mi mamá se descompuso. Si algo pesa menos de 1000 g, la báscula muestra correctamente su peso. Si algo pesa 1000 g o más, muestra cualquier número mayor que 1000 g. Tenemos 5 pesas con respectivos pesos A, B, C, D y E (medidos en gramos). Todas las pesas son menores a 1000 g. Al pesar algunas de ellas por pares, obtuve las siguientes cantidades: $B+D=1200$ g, $C+E=2100$ g, $B+E=800$ g, $B+C=900$ g y $A+E=600$ g. ¿Cuál de las pesas es la más pesada?

Problema 3.45. (4.^{a} OMMEB-Ver., N3, E4, P2). En una tienda venden estampas coleccionables. Cada estampa tiene un costo individual de $\$2$. En la tienda tienen una promoción: si compras un número de estampas múltiplo de 4, te regalan una estampa por cada cuatro; si compras un número múltiplo de 11, te regalan tres estampas por cada once; y si compras un número de estampas múltiplo de 19, te regalan cinco por cada diecinueve. Esteban ha ahorrado $\$1222$ y planea gastarlo todo en estampas. Como es muy inteligente, compró de tal forma que pudiera conseguir la mayor cantidad de estampas con la promoción. Si inicialmente Esteban no tenía estampa alguna, ¿cuántas tiene en total después de su compra?

Problema 3.46. (4.^{a} OMMEB-Ver., N3, E4, P5). ¿Cuál es el dígito de las decenas del número que resulta de la siguiente resta?

$$2025^{2024^{2023}} - 2020^{2021^{2022}}.$$

Problema 3.47. (4.^{a} OMMEB-Ver., N3, E4, P7). Sea $P_1, P_2, \ldots, P_{2020}$ la lista de los primeros 2020 números primos en algún orden. Sea

$$A = (P_1 + P_2 + \cdots + P_{2019})(P_2 + P_3 + \cdots + P_{2020}),$$
$$B = (P_1 + P_2 + \cdots + P_{2020})(P_2 + P_3 + \cdots + P_{2019}).$$

Determina cuál número es mayor de entre A y B.

Problema 3.48. (5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E4, P4). Considera la sucesión de números

$$4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, \ldots$$

Para $n > 2$, el n-ésimo término de la sucesión es el dígito de las unidades de la suma de los dos términos anteriores. Si S_n es la suma de los primeros n términos de esta sucesión, ¿cuál es el valor más pequeño de n para el cual $S_n > 10,000$?

3.5. Soluciones a los problemas de álgebra

3. 5. 1. Nivel 1

Solución del problema 3.1. La respuesta es (e).

Para el primer examen podemos obtener el número de aciertos por medio de la regla de tres, es decir, si 30 aciertos era el $100\,\%$ entonces al $60\,\%$ le corresponde $(0.6)(30) = 18$ aciertos. Análogamente tenemos que para el segundo examen obtuvo $(0.7)(10) = 7$ aciertos, del tercero $(0.8)(30) = 24$, y del último obtuvo $(0.9)(60) = 54$.

Así que tuvo $18 + 7 + 24 + 54 = 103$ aciertos en total de $30 + 10 + 30 + 60 = 130$ problemas. Luego, el porcentaje de problemas contestados correctamente fue

$$\frac{103}{130} = 0.7923.$$

Solución del problema 3.2. La respuesta es (a).

Tenemos que dos vacas producen $\frac{30}{4}$ de leche en un día, así que una vaca produce $\frac{30}{4 \cdot 2} = \frac{15}{4}$ litros de leche en un día. Luego, x cantidad de vacas produce $\frac{15x}{4}$ de leche en un día, por lo que en y días producirán $\frac{15 \cdot x \cdot y}{4}$ litros de leche.

Otra solución. Notemos que el número de vacas es inversamente proporcional al número de días y es proporcional al número de litros de leche que se producen. Por lo que la constante de proporcionalidad es $\frac{2 \cdot 4}{30} = \frac{4}{15}$. Sea z la cantidad que buscamos, luego $\frac{x \cdot y}{z} = \frac{4}{15}$, por lo que $z = \frac{15 \cdot x \cdot y}{4}$.

Solución del problema 3.3. La respuesta es (d).

El $20\,\%$ de 1000 es 200, por lo que el martes vendió 1200 pasteles. El día miércoles vendió $1200(1.3) = 1560$ pasteles. Luego, el jueves vendió $1560(1.40) = 2184$ y, por último, el viernes vendió $2184(1.50) = 3276$ pasteles. Por lo tanto, la semana pasada Esteban vendió $1000 + 1200 + 1560 + 2184 + 3276 = 9220$ pasteles.

Solución del problema 3.4. La respuesta es (d).

Pensemos que n es la cantidad de canicas que tiene Luis, así que Paco tiene $n + 1$ canicas y Hugo tiene $n+2$ canicas. Por lo que hay en total $3n+3$ canicas; si igualamos la expresión a cada una de las cantidades de las opciones podemos darnos cuenta que 69 canicas es la respuesta correcta.

Solución del problema 3.5. La respuesta es (b).

Notemos que buscamos todos los valores enteros posibles de n tales que

$$\frac{1}{6} \leq \frac{n}{15} \leq \frac{1}{3}$$

o de manera equivalente,

$$\frac{5}{2} \leq n \leq 5.$$

Así que los valores de n que cumplen esto son 3, 4 y 5, pero $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ y $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, que son reducibles. El único valor de n que cumple con lo requerido es $n = 4$, por lo tanto solo hay una fracción que satisface las condiciones.

Solución del problema 3.6. La respuesta es (d).

La segunda vez la jarra tenía $4/5 - 1/5 = 3/5$ de agua extra, y su peso se incrementó por $740 - 560 = 180$ g, de manera que el agua que corresponde a llenar una quinta parte de la jarra pesa $180/3 = 60$ g. Así, la jarra pesa $560 - 60 = 500$ g.

Solución del problema 3.7. La respuesta es (c).

Si la fracción original es $\frac{a}{b}$ y x es el porcentaje que se reduce a b, entonces queremos que

$$\frac{(1+0.4)a}{(1-x)b} = 2\frac{a}{b}.$$

De donde, $\frac{1.4}{1-x} = 2$ o, equivalentemente, $\frac{1.4}{2} = 1-x$ y así, $x = 1-0.7 = 0.3$, es decir, hay que reducir a b en un $30\,\%$.

Solución del problema 3.8. La longitud del lado del cuadrado mediano es $6+2 = 8$ cm. La longitud del lado del cuadrado más grande es de $8+6-2 = 12$ cm.

Solución del problema 3.9. Cada persona hace 75 llaveros en 9 horas, de manera que cada hora hace $\frac{75}{9}$ llaveros. Entonces 6 personas logran $\frac{6\times 75}{9} = 50$ llaveros por hora. Para producir 300 llaveros necesitan trabajar 6 horas.

Otra solución. El número de personas se incrementó en $50\,\%$, de manera que el número de horas debe reducirse de manera que al aumentar $50\,\%$ sea 9, es decir, si x es el número de horas, entonces

$$x(1+0.5) = 9$$

de donde $x = 6$.

Solución del problema 3.10. Juntos gastaron $15\,\% + 100\,\% + 160\,\% = 275\,\%$ de lo que gastó Joaquín. Así, usando la regla de tres, se tiene que Joaquín gastó $\frac{5{,}500\times 100}{275} = 2,000$ pesos. Como Armando gastó el $60\,\%$ más, gastó $3,200$ pesos.

Solución del problema 3.11. Tere recorrió $6\times 50 = 300$ m. Miguel recorrió el triple, o sea, 900 m. Como Miguel dio cinco vueltas a la alberca, recorrió 10 veces la suma del largo y el ancho de la alberca. Es decir, si x es el ancho, Miguel recorrió $10(50+x) = 900$, de donde $x = 40$ m.

Solución del problema 3.12. La diferencia entre 36 y 60 es 24 y, como cada niño contribuye en 2 a la suma, concluimos que el número de niños es 12.

Solución del problema 3.13. Sea x la cantidad de dulces que la maestra le dio a Esteban, por lo que a Iván le dio $2x$, a Brenda le dio $3x$, a Ulises $\frac{3x}{2}$ y a María $\frac{2x}{4} = \frac{x}{2}$. Luego, $x+2x+3x+\frac{3x}{2}+\frac{x}{2} = 8x$ es la cantidad total de dulces, así que $8x = 80$ y, por lo tanto, $x = 10$.

Concluimos que a Esteban le tocaron 10 dulces, a Iván 20, a Brenda 30, a Ulises 15 y a María 5.

Solución del problema 3.14. Si denotamos como X_0 a la cantidad inicial que Don Francisco tenía en su cuenta bancaria, y como X_i a la cantidad que resultó tener al transcurrir i años, observemos que:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \frac{8}{10}X_0,\\
X_2 &= \frac{21}{20}X_1 = \left(\frac{21}{20}\right)\frac{8}{10}X_0 = \frac{168}{200}X_0,\\
X_3 &= \frac{9}{10}X_2 = \left(\frac{9}{10}\right)\frac{168}{200}X_0 = \frac{1512}{2000}X_0,\\
X_4 &= \frac{5}{4}X_3 = \left(\frac{5}{4}\right)\frac{1512}{2000}X_0 = \frac{7560}{8000}X_0 = \frac{945}{1000}X_0.
\end{aligned}
$$

Finalmente, al transcurrir estos 4 años, tenemos un $94.5\,\%$ de la cantidad inicial, es decir, la cuenta de Don Francisco disminuyó un $5.5\,\%$ respecto a lo que tenía al inicio.

Solución del problema 3.15. En la segunda semana quedaba $\frac{1}{2}$ de la cantidad inicial, el canario comió $\frac{1}{3}$ de lo que quedaba, es decir, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ de la cantidad original, así que al empezar la tercera semana ya solo quedaba $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ del contenido original. Luego, el canario se comió la cuarta parte, es decir, $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ de la cantidad inicial, por lo que al final queda $\frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ del contenido original.

Solución del problema 3.16. Sea a el valor del lado horizontal del rectángulo superior izquierdo y c el lado vertical de este mismo rectángulo; sea d el lado vertical del rectángulo inferior izquierdo y b el lado horizontal del rectángulo superior derecho.

Sabemos, por el enunciado del problema, que

$$
\begin{aligned}
2a + 2c &= 2,\\
2b + 2c &= 4,\\
2a + 2d &= 4.
\end{aligned}
$$

Para encontrar el valor de x necesitamos el de $2b + 2d$. De la primera ecuación despejamos el valor de c y la sustituimos en la segunda ecuación $2b + 2(1 - a) = 4$, de donde tenemos que $a = b - 1$. Sustituimos ahora el valor de a en la tercera ecuación y obtenemos $b + d = 3$, con lo que $x = 2b + 2d = 6$.

Solución del problema 3.17. Respuesta: ocho litros.

Dos litros de agua equivalen a $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ de la cubeta, así que el total de la cubeta es de ocho litros.

Solución del problema 3.18. Notemos que $20^2 = 400$, donde el dígito de las decenas es 0; por otro lado $20^3 = 8000$, donde el dígito de las decenas es 0. Podemos notar que 20^{21} tendrá como dígito de las decenas al 0. Así, el dígito de las decenas de $22^{21} - 22$ es 7.

Solución del problema 3.19. Como 3 plátanos cuestan tanto como 2 manzanas, tenemos que 18 plátanos cuestan igual que 12 manzanas. Ya que 6 manzanas cuestan lo mismo que 4 naranjas llegamos a que 12 manzanas es el equivalente a 8 naranjas, por lo tanto 18 plátanos cuestan tanto como 8 naranjas.

3. 5. 2. Nivel 2

Solución del problema 3.20. La respuesta es (d).

Como pesa 400 g cuando está lleno y 100 g cuando está vacío, deducimos que el líquido total pesa 300 g. Entonces la mitad del líquido pesa 150 g que, agregados al peso del recipiente, nos dan 250 g.

Solución del problema 3.21. La respuesta es (c).

Sean V la cantidad de dulces de limón y R la cantidad de dulces de fresa que le dieron a Ulises, por lo tanto pagó $3V + 2R = 62$. Luego, como extrae tres dulces y dos de ellos son de limón y queda la misma cantidad de dulces de fresa que de limón, quiere decir que los de fresa originalmente eran uno más que los de limón, por lo que $R = V + 1$. Por lo tanto, $5V + 2 = 62$, de donde $V = 12$ y $R = 13$. Si le hubieran dado la cantidad correcta de dulces hubiera pagado $13(3) + 12(2) = 63$. Por lo tanto, hubiera pagado un peso más.

Solución del problema 3.22. La respuesta es (b).

Sabemos que en una hora Ulises hace $\frac{1}{4}$ de un trabajo, mientras que Marichuy hace $\frac{1}{5}$ del mismo trabajo, así que juntos hacen $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$ de la encomienda. Luego de dos horas juntos hacen $2(\frac{9}{20}) = \frac{9}{10}$ del trabajo, por lo que ahora tenemos que saber en cuanto tiempo t Marichuy acabaría $\frac{1}{10}$ de la tarea restante, que se expresa de la siguiente forma: $\frac{1}{5}t = \frac{1}{10}$, de donde $t = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, Marichuy acaba el trabajo media hora después de que se va Ulises.

Solución del problema 3.23. La respuesta es (a).

Notemos que $6 = 2 \cdot 3$, $36 = (2 \cdot 3)^2$ y $216 = (2 \cdot 3)^3$. Luego, $6^{30} = 2^{30} \cdot 3^{30}$, $36^{10} = ((2 \cdot 3)^2)^{10} = 2^{20} \cdot 3^{20}$ y $216^6 = ((2 \cdot 3)^3)^6 = 2^{18} \cdot 3^{18}$, por lo que $6^{30} > 36^{10} > 216^6$.

Solución del problema 3.24. Como el $55\,\%$ de 20 es 11, tenemos que al principio había acertado 11 veces. Ya que el $56\,\%$ de 25 es 14, acertó $14 - 11 = 3$ veces en esos cinco tiros.

Solución del problema 3.25. La cantidad que vende por la mañana es de $\frac{48}{2} = 24$ galletas, por lo que en la mañana ganó $24 \times 25 = 600$ pesos. Luego, en la tarde las dos terceras partes de lo que quedan es $\frac{2}{3} \times 24 = 16$, y como cada una la vende a 12.50 tendríamos que en la tarde gana $16 \times 12.50 = 200$ pesos. Por último, la cantidad de galletas que queda en la noche es $24 - 16 = 8$, por lo que su ganancia fue de $8 \times 10 = 80$ pesos. Ahora, como gasta 7.50 pesos por galleta, por todas gasta $7.50 \times 24 = 360$ pesos, por lo que en total ganó $600 + 200 + 80 - 360 = 520$ pesos.

Solución del problema 3.26. Sea x la cantidad de preguntas que contestó correctamente Esteban. Como Ulises contestó $20\,\%$ menos que Esteban, eso significa que contestó $(0.8)x$ acertadamente, en tanto Iván contestó $(1.45)x$ bien. Luego

$$65 = (0.8)x + x + (1.45)x = (3.25)x,$$

con lo que $x = 20$. Por lo tanto, Ulises obtuvo 16 aciertos, Esteban obtuvo 20 e Iván 29.

Solución del problema 3.27. Llamemos c al número de respuestas correctas. Como Guadalupe obtuvo 100 de calificación, entonces $7c \geq 100$, de donde $c \geq 100/7 > 14$.

Por otro lado, cada respuesta incorrecta resta 4 puntos y 100 es múltiplo de 4, así que $7c$ debe ser también múltiplo de 4, de donde, a su vez, c es múltiplo de 4. También sabemos que el examen tuvo 20 preguntas, así que las únicas posibilidades para c son $c = 16$ o $c = 20$. Claramente $c \neq 20$. Para $c = 16$, $7c = 112$, de donde tuvo 3 respuestas incorrectas y dejó 1 en blanco.

Solución del problema 3.28. Las fracciones que buscamos son de la forma $\frac{7}{n}$, con $n > 0$, y deben cumplir que

$$\frac{1}{4} \leq \frac{7}{n} \leq \frac{1}{3},$$

es decir,

$$3n \leq 84 \leq 4n.$$

Por lo que $n \leq 28$ y además $n \geq 21$. Como la fracción que buscamos $\frac{7}{n}$ debe ser reducida, las únicas opciones para n son: 22, 23, 24, 25, 26 y 27. Es decir, hay 6 fracciones.

Solución del problema 3.29. Observemos que $3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$. Además $4^c = 2^{2c}$. Luego, $a + 2c = 4$, así que

$$7 = a + b + c + d = 4 - 2c + 2 + 2 + c = 8 - c.$$

Concluimos que $c = 1$.

Solución del problema 3.30. Observemos que $1590 = 2 \times 3 \times 5 \times 53$. Luego notemos que $53 > 30 = 2 \times 3 \times 5$, por lo que este factor debe ser parte de la edad del papá de Ulises. Luego 53 multiplicado por cualquier otro de los factores es mayor a 100, por lo tanto la edad de Ulises es 30 y el de su papá es 53, luego Ulises nació en $2020 - 30 = 1990$.

Solución del problema 3.31. Veamos que 2020^2 tendrá por últimos dos dígitos 00, esto se cumplirá para cualquier potencia n, es decir, 2020^{2021} va a terminar en 00. Luego, los últimos dos dígitos de $2020^{2021} - 2022$ son 78, por lo tanto el dígito de las decenas es 7.

Solución del problema 3.32. La edad de Tomás hace N años era $T - N$. La suma de las edades de los tres niños en ese tiempo era $T - 3N$. Por lo que $T - N = 2(T - 3N)$, así que $5N = T$, por lo que $\frac{T}{N} = 5$. Las condiciones que pide el problema se pueden cumplir si, por ejemplo, la edad de Tomás es 30 y la edad de los niños es $9, 10, 11$, tendríamos que $T = 30$ y $N = 6$.

3. 5. 3. Nivel 3

Solución del problema 3.33. La respuesta es (d).

Digamos que las cantidades de personas en los cinco primeros vagones son a, b, c, d y e, en ese orden. Como $a + b + c + d + e = 199$, pero también del segundo vagón al sexto hay en total 199 personas, entonces el sexto vagón tiene a personas. De la misma manera deducimos que el séptimo tiene b personas y así sucesivamente.

Solución del problema 3.34. La respuesta es (b).

Sean V la cantidad de dulces de limón, R los de fresa y A los de menta que le dieron a Ulises en su compra. Tenemos entonces que la cantidad que pagó es $3V+2R+A=127$. Si le hubieran dado los que pidió debió pagar $3A+2V+R=127+28=155$. Cuando quita dos de fresa tenemos $R-2=A+V$. De aquí que $5V+3A=123$ y $3V+4A=153$. Luego, $20V+12A=492$ y $9V+12A=459$. Así $11V=33$, luego $V=3$, $A=36$ y $R=41$.

Solución del problema 3.35. La respuesta es (b).

Notemos que $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, donde $a+b>a-b>0$, ya que son enteros positivos. Por otro lado, $2019=3\times 673$, donde 673 es primo, luego tenemos que $2019=1\times 2019$ o $2019=3\times 673$. Ahora veamos los siguientes casos:

- Caso 1. Si $a+b=2019$ y $a-b=1$ obtenemos la pareja $(1010,1009)$.
- Caso 2. Si $a+b=673$ y $a-b=3$ obtenemos la pareja $(338,335)$.

Por lo tanto, solo hay dos parejas.

Solución del problema 3.36. La respuesta es (b).

Observemos que $6^{39}=(2\cdot 3)^{39}>5^{39}$, así que si multiplicamos ambos lados por $(2\cdot 3)^{39}$ llegamos a que $(2\cdot 3)^{78}>(2\cdot 3)^{39}\cdot 5^{39}=30^{39}$. Por otro lado, $3\cdot 5>2\cdot 3$, por lo que $(3\cdot 5)^{80}>(3\cdot 5)^{78}>(2\cdot 3)^{78}$. De lo anterior la única desigualdad verdadera es $15^{80}>6^{78}>30^{39}$.

Solución del problema 3.37. La respuesta es (d).

Iniciemos notando que el n-ésimo número de la primera fila tiene la forma

$$\frac{n(n+1)}{2},$$

llamemos n*-ésima diagonal izquierda* a los números que se encuentran en la fila i y la columna j, con $i+j-1=n$. Por ejemplo, la tercera diagonal izquierda son los números en la fila i y la columna j con $i+j-1=3$, obteniendo las siguientes opciones para los valores de i y j:

Fila i	Columna j	Número en la posición (i,j)
1	3	6
2	2	5
3	1	4

Observemos que los números en la n-ésima diagonal izquierda son los enteros menores que el elemento en la posición $(1,n)$, disminuidos de 1 en 1.

A partir de lo anterior, notemos que $\frac{63(64)}{2}=2016$ y que $\frac{64(65)}{2}=2080$, como $2016<2020<2080$, entonces 2020 estará en la diagonal izquierda que tiene como elemento $(1,64)$ al 2080.

Así, la fila i y la columna j en la que se encuentra 2020 cumple que $i+j-1=64$, es decir, $i+j=65$ y estará $2080-2020=60$ posiciones hacia la izquierda de 2080, esto es, en la columna $j=4$ y así $i=65-j=61$.

Por lo tanto, 2020 se encuentra en la fila 61 y la columna 4.

Solución del problema 3.38. Digamos que los lados del contenedor miden a, b y c metros. Entonces $2ab = 3bc = 5ac = 120$, así que $ab = 60$, $bc = 40$ y $ac = 24$. Al multiplicar las tres igualdades obtenemos $(abc)^2 = 24^2 \cdot 10^2$, de donde el volumen del contenedor es $abc = 240$.

Solución del problema 3.39. Como n es el número más pequeño del conjunto $\mathcal{A}$, entonces debe tener la mayor cantidad de 9's en su expresión. Ya que $2021 = 224 \cdot 9 + 5$ tenemos que $n = 5999 \cdots 99$, por lo que n tiene 224 dígitos 9.

Ahora, como m es el número más grande del conjunto $\mathcal{A}$, debe tener la mayor cantidad de dígitos posibles, por lo que en su expresión aparecen 2021 dígitos 1. Luego,

$$\begin{aligned} m - 1 &= 1\underbrace{1\cdots1}_{2019\ 1\text{'s}}0, \\ n + 1 &= 6\underbrace{0\cdots0}_{224\ 0\text{'s}}. \end{aligned}$$

Así,

$$(m-1) - (n+1) = 1\underbrace{1\cdots1}_{1784\ 1\text{'s}}05\underbrace{1\cdots1}_{223\ 1\text{'s}}0,$$

por lo que la suma de los dígitos de este número es 2023.

Solución del problema 3.40. La respuesta es 6093.

Para saber el último número n que escribió $3n$ veces tenemos que ver que:

$$3 + 6 + 9 + \cdots + 3n = 3(1 + 2 + \cdots + n) = 3\frac{n(n+1)}{2} \leq 500.$$

Notemos que si $n = 18$, entonces $\frac{3(18)(19)}{2} = 513$, por lo que escribió $500 - \frac{3(17)(18)}{2} = 500 - 459 = 41$ veces el número 18. Luego, cada número n que se escribe $3n$ veces aporta a la suma total $3n^2$, por lo que la suma de los números es:

$$\begin{aligned} 3(1^2) + 3(2^2) + \cdots + 3(17^2) + 18(41) &= 3(1^2 + 2^2 + \cdots + 17^2) + 18(41) \\ &= \frac{3(17)(18)(35)}{6} + 18(41) \\ &= 5355 + 738 \\ &= 6093. \end{aligned}$$

Solución del problema 3.41. De acuerdo con la información del problema, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A(2)^2 + B(2) + C &= 4A + 2B + C = 11, \\ A(3)^2 + B(3) + C &= 9A + 3B + C = 18, \\ A(4)^2 + B(4) + C &= 16A + 4B + C = 27. \end{aligned}$$

Al resolverlo obtenemos $A = 1$ $B = 2$ y $C = 3$.

Solución del problema 3.42. La respuesta es 56 problemas.

Sea k el número de problemas que ambas resolvieron. Por cada problema que resolvieron se suman cinco puntos a la cuenta total. Como cada una resolvió 60 problemas, entonces $60-k$ no fueron resueltos por la otra y así, el total de puntos resulta de calcular $5k+4(60-k)+4(60-k)=480-3k$. Ya que $480-3k=312$, obtenemos que $k=56$.

Solución del problema 3.43. Sea m y r la cantidad que aportaron Mariana y Ricardo, respectivamente. Como buscamos porcentajes, podemos suponer que $r=100$ y tenemos que $\frac{m+100}{2}=70$, de donde $m=40$. La proporción que le tocó a Mariana es $\frac{70}{40}=1.75$, es decir, recibió $75\,\%$ más.

Solución del problema 3.44. Como $B+E$ y $B+C$ pesaron menos de 1000 gramos sabemos que los pesos obtenidos son correctos, luego $2B+(C+E)=1700$. Dado que $C+E\geq 1000$ tememos que $B\leq 350$. Ya que $B+D\geq 1000$, entonces $D\geq 650$ (por lo que $B<D$). De $A+E=600$ concluimos que A y E son menores que D. Por último, como $B+C=900$ y $B+D\geq 1000$, llegamos a que $C<D$. Por lo tanto, D es la que pesa más.

Solución del problema 3.45. Notemos que para tener 15 estampas gratis con la primera promoción necesitamos comprar 60 estampas, con la segunda promoción necesitamos comprar 55 estampas y con la tercera 57 estampas. Por lo que nos conviene comprar la mayor cantidad de estampas con la segunda promoción. Como cada estampa cuesta 2 pesos, entonces en total Esteban va a comprar 611; luego, notemos que $11\times 55=605$ y $611=605+6$. Por lo que la mayor cantidad de estampas múltiplo de 11 que podemos comprar es 605. Luego, las 6 restantes las compramos como 4, donde nos regalan 1 y las otras dos estampas las tenemos que comprar individualmente. Por lo que en total le regalaron $55\times 3+1=165+1=166$. En total, Esteban tiene $611+166=777$ estampas después de su compra.

Solución del problema 3.46. Observemos que para saber los últimos dos dígitos de 2025^n nos concentramos solamente en los últimos dos dígitos de 25^n, los cuales serán 25. Por otro lado, veamos que 2020^2 tendrá por últimos dos dígitos 00, esto se cumplirá para cualquier potencia n, es decir, 2020^{2021} va a terminar en 00. Luego, los últimos dos dígitos de $2025^{2024^{2023}}-2020^{2021^{2022}}$ es 25, por lo tanto el dígito de las decenas es 2.

Solución del problema 3.47. Sea $x=P_2+P_3+\cdots+P_{2019}$, entonces $A=(P_1+x)(x+P_{2020})$ y $B=(P_1+x+P_{2020})(x)$. Luego

$$A-B=(x^2+xP_1+xP_{2020}+P_1P_{2020})-(x^2+xP_1+xP_2020)=P_1P_{2020}>0.$$

Por lo tanto, $A>B$.

Solución del problema 3.48. Notemos que al inicio, después del tercer término, cada elemento de la sucesión depende de los dos elementos anteriores. Si escribimos más términos de esta sucesión tenemos que

$$4,7,1,8,9,7,6,3,9,2,1,3,4,7,1,\ldots$$

Por lo tanto, la sucesión es periódica con periodo 12. La sucesión se vuelve a repetir a partir del 13avo término. Ya que $S_{12} = 60$, tenemos que $S_{12k} = 60k$ para todo entero positivo k. El k más grande tal que ocurra que $S_{12k} \leq 10000$, es aquel que cumpla

$$k = \left\lfloor \frac{10000}{60} \right\rfloor = 166,$$

con lo que $S_{12\cdot 166} = 60 \cdot 166 = 9960$. Para tener que $S_n > 10000$, debemos agregar los suficientes términos que su suma sea mayor que 40, lo cual se puede hacer si agregamos los siguientes 7 términos de la sucesión, pues su suma es 42. Por lo tanto, el valor más pequeño de n es $12 \cdot 166 + 7 = 1999$.

Capítulo 4
Conteo

4.1. Definiciones y resultados básicos

En este capítulo estudiaremos la forma de contar elementos de un conjunto o de algún evento que ocurra. Si se desea estudiar más extensamente estos temas se puede encontrar más información en Pérez Seguí (2005) y Vilenkin (1972).

Para poder expresar de manera más sencilla algunas fórmulas, definiremos un concepto llamado el **factorial** de un número entero no negativo, y lo haremos de la siguiente manera:

- Si n es un entero positivo, $n = 1, 2, 3, \ldots$, el factorial de n, al cual denotaremos por $n!$, es igual al producto de todos los números enteros positivos menores o iguales que n; esto es,

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

- Si $n = 0$, simplemente le asignaremos el siguiente valor:

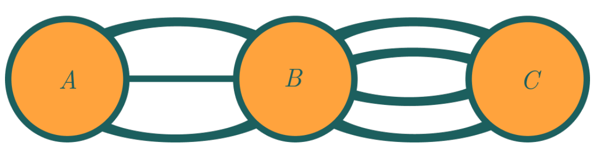
$$0! = 1.$$

4. 1. 1. Principio fundamental de conteo

El **principio fundamental de conteo** establece que si existen m formas de que ocurra un evento A y n formas de que ocurra otro evento B distinto; el total de formas en que pueden ocurrir A y B juntos es $m \cdot n$.

Ejemplo

Consideremos las ciudades A, B y C, como se indica en la figura. Para ir de la ciudad A a la ciudad B existen 3 caminos y para ir de B a C hay 4 caminos. Calcula el número de rutas posibles para ir de A a C pasando por B.



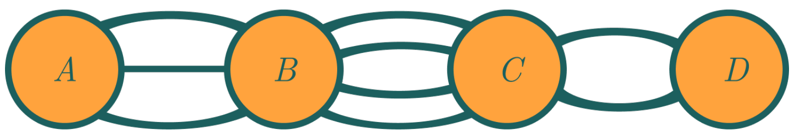
Como para ir de A a C debemos considerar todas las posibles opciones para ir de A a B y luego de B a C, por el principio fundamental de conteo la solución al problema es

$$3 \cdot 4 = 12 \text{ rutas posibles.}$$

El ejemplo anterior se puede hacer más complejo, considerando más ciudades intermedias o poniendo otras condiciones, pero la herramienta que se usa para resolver este tipo de problemas es la misma.

▶ **Ejemplo**

Consideremos las ciudades A, B, C y D como se indica en la figura. Las rutas entre A, B y C son como antes, además tenemos que para ir de C a D solamente se tienen 2 caminos. Calcula el número de rutas posibles para ir de A a D pasando por B y C, y regresar sin usar alguno de los caminos utilizados al ir de A a D.



Por el principio fundamental de conteo tenemos que las rutas posibles para ir de A a D son el número de caminos para ir de A a B, multiplicado por el número de caminos para ir de B a C, por el número de caminos para ir de C a D; esto es:

$$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24 \text{ rutas posibles de } A \text{ a } D.$$

Ahora, como de regreso no podemos utilizar ninguno de los caminos que escogimos de ida, entonces nos queda un camino para regresar de D a C, 3 caminos para regresar de C a B y 2 para regresar de B a A; así,

$$2 \cdot 3 \cdot 1 = 6 \text{ rutas posibles de } D \text{ a } A.$$

Finalmente, usando una vez más el principio fundamental de conteo sabemos que las maneras en que podemos ir de A a D y regresar sin repetir caminos son $24 \cdot 6 = 144$ rutas en total.

4. 1. 2. Permutaciones

Definición 35. Una **permutación** es un “arreglo” de objetos en un “orden” determinado.

▶ **Ejemplo**

Si tenemos un conjunto de tres elementos $\{a, b, c\}$, podemos determinar el número de permutaciones de esos tres elementos si no se repiten objetos.

$$\begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Pensemos en el arreglo de los tres elementos ordenados; es decir, en cada arreglo los elementos ocupan un lugar específico. En el primer lugar podemos colocar cualquiera de los tres elementos que tenemos, en el segundo sólo podemos colocar dos elementos (pues ya se ha colocado uno en el lugar anterior) y finalmente en el último lugar solo queda por colocar un elemento. De esta manera, aplicando el principio fundamental de conteo tenemos que la solución es

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

permutaciones.

Aunque el problema anterior lo resolvimos para un conjunto de 3 elementos, es fácil darse cuenta que podemos generalizarlo para un conjunto con cualquier número n de elementos, lo cual se establece en la siguiente proposición.

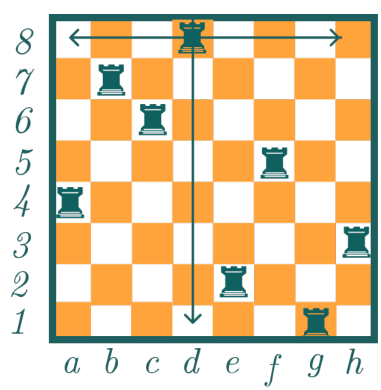
$$\begin{array}{ccccc} \square & \square & \cdots & \square & \square \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ n & n-1 & & 2 & 1 \end{array}$$

Teorema 6. El total de formas en que se pueden permutar n objetos tomados de n en n, denotado por P_n^n, es igual a

$$P_n^n = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

▶ Ejemplo

¿De cuántas maneras pueden colocarse 8 torres en un tablero de ajedrez sin que se ataquen?



En la primera fila, hay 8 cuadros en los que se puede ubicar una torre. En la segunda, solo quedan 7 lugares para poner una torre, debido a las condiciones del problema;

si seguimos este razonamiento, el número de formas es igual a

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!$$

Siguiendo las ideas anteriores, también podremos considerar el número de permutaciones que es posible encontrar al tomar menos elementos del total.

$$\begin{array}{cccc} \square & \square & \cdots & \square \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ n & n-1 & & n-(k-1) \end{array}$$

Si volvemos a pensar en las permutaciones como acomodar n objetos en k lugares, denotado por P_k^n, por el principio fundamental de conteo tenemos que

$$\begin{aligned} P_k^n &= n \cdot (n-1) \cdots (n-(k-1)) \\ &= n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (n-k) \cdots 2 \cdot 1}{(n-k) \cdots 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

Por lo tanto, llegamos al siguiente resultado.

Teorema 7. El número de permutaciones de n objetos en k lugares está dado por

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

para $k \leq n$.

► **Ejemplo**

¿De cuántas formas pueden sentarse 4 personas en un cuarto con nueve sillas diferentes?

Este problema lo podemos pensar de la siguiente manera: la primera persona puede elegir 9 sillas para sentarse; a la segunda solo le quedan 8 sillas para escoger y así sucesivamente; de donde se ve que el resultado es

$$P_4^9 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6.$$

4. 1. 3. Combinaciones

Definición 36. Cualquier subconjunto con k elementos, elegidos de un conjunto de n objetos, se dice que es una **combinación** de n objetos, tomados de k en k.

A la hora de elegir los objetos debemos considerar que no podemos escoger más de los que hay en el conjunto, que los objetos no se deben repetir y que no importa el orden en que se escojan.

Combinaciones

El número de combinaciones de n objetos diferentes tomados de k en k, con $k \leq n$, es igual a

$$C_k^n = \frac{P_k^n}{P_k^k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

También es común denotar a las combinaciones mediante los llamados coeficientes de Newton:

$$\binom{n}{k} = C_k^n.$$

Propiedades de las combinaciones

Para cualesquiera enteros positivos k y n, tales que $k < n$, se cumplen las siguientes relaciones:

- $C_0^n = 1 = C_n^n$.
- $C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$.

► **Ejemplo**

En un salón de clases hay 25 estudiantes y se van a crear equipos de trabajo de 3 integrantes para realizar una tarea. ¿Cuántos equipos se pueden formar?

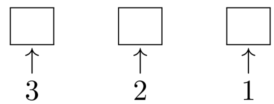
Observemos que en un equipo no caben todos los estudiantes del salón, claramente todos lo integrantes del equipo deben ser personas diferentes y, además, dentro del equipo no importa el orden de los estudiantes. De esta manera el número de equipos que se pueden formar es

$$C_3^{25} = \frac{25!}{(25-3)! \cdot 3!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2300.$$

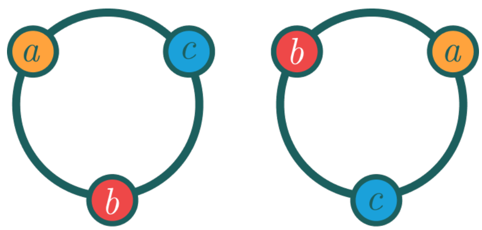
4. 1. 4. Permutaciones cíclicas

Definición 37. Llamamos **permutaciones cíclicas** al número de formas diferentes de acomodar n objetos en círculo y lo denotamos por PC_n.

Para observar la diferencia entre las permutaciones y las permutaciones cíclicas, veamos el ejemplo con tres objetos, en donde tenemos $P_3^3 = 6$.



Cuando contamos de esta manera, el arreglo (a, b, c) es diferente de (b, c, a). Sin embargo, cuando pensamos en los mismos objetos acomodados en círculo, es claro que son iguales, ya que la a está a la derecha de la c y la b a la derecha de la a en ambos dibujos.



La manera de obtener una fórmula para PC_n es mediante las siguientes dos consideraciones:

1. Encontrar el número de formas para acomodar n objetos en n lugares, que es igual a
$$P_n^n = n!$$
2. La cantidad anterior hay que dividirla entre n, ya que dado un arreglo, éste se repite n veces, por los n lugares en los que se puede acomodar el arreglo rotándolo.

De esta forma el número de permutaciones cíclicas de n objetos es

$$PC_n = \frac{P_n^n}{n} = \frac{n!}{n} = \frac{n \cdot (n-1)!}{n} = (n-1)!$$

► **Ejemplo**

En un kinder bailan 7 niños en círculo. ¿De cuántas formas se pueden colocar en el círculo?

Por lo expuesto anteriormente, el número buscado está dado por

$$PC_7 = 6! = 720.$$

Es decir, hay 720 formas de acomodar a los niños en el círculo.

4. 1. 5. Permutaciones con repetición

Definición 38. Cuando se acomodan n objetos en k lugares con la opción de repetir los objetos, tenemos **permutaciones con repetición**.

▶ Ejemplos

1. ¿Cuántas placas de autos se pueden hacer si se usan 3 vocales al inicio y 2 dígitos diferentes al final?

   Tenemos tres lugares para acomodar letras. En el primer lugar se pueden poner cinco vocales. Como se pueden repetir las vocales, en el segundo lugar también se pueden poner cinco vocales y análogamente en el tercer lugar.

   En cuanto a los números pasa algo parecido, salvo el hecho de que no se pueden repetir. En primer lugar podemos poner diez números, del 0 al 9; sin embargo, en el segundo lugar ya no se puede repetir el dígito. Por lo tanto, en el segundo lugar solo se pueden poner nueve números.

   Por el principio fundamental de conteo, al multiplicar todos los números anteriores obtenemos el número total de placas:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 9 &= 5^3 \cdot 10 \cdot 9 \\ &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \\ &= 11250. \end{aligned}$$

2. Encontrar todos los números de cinco cifras que sean además ascendentes.

   El número más pequeño que formaremos es 12345 y el mayor 56789; entonces, todo número n que cumpla las condiciones del problema debe satisfacer las siguientes desigualdades:

$$12345 \leq n \leq 56789.$$

   Ahora, si tomamos 5 cifras cualesquiera se puede formar uno y solo un número como el que queremos. Por ejemplo, si elegimos 7, 4, 9, 2 y 1, de todos los posibles números a formarse con estas cifras, el único que cumple las condiciones requeridas es 12479. Por lo tanto, la cantidad de números que se pueden formar es

$$C_5^9 = \frac{9!}{(9-5)! \cdot 5!} = 126.$$

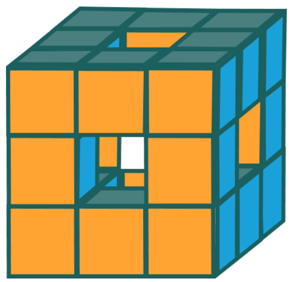
4.2. Preguntas de conteo, nivel 1

Los problemas que se presentan a continuación formaron parte de los exámenes eliminatorios de la OMMEB en Veracruz. Para poder identificarlos se les ha asignado una notación como la siguiente: **5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P3**; lo anterior significa que dicho ejercicio corresponde a la 5.^{a} OMMEB de Veracruz, del Nivel 1, del Examen selectivo 2, Problema 3. En el caso de los problemas correspondientes a la 2.^{a} OMMEB se omite el número de examen y el nivel, puesto que se utilizó solo un examen selectivo para todos los niveles.

El nivel 1 en la OMMEB refiere a cuarto y quinto grados de primaria.

4. 2. 1. Preguntas de opción múltiple

Problema 4.1. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E1, P6). Con cubos de 1 cm de lado se formó un cubo de $3 \times 3 \times 3$. Después, en cada una de las direcciones se hicieron perforaciones de adelante hacia atrás, de izquierda a derecha y de arriba a abajo, de forma que se quiten siempre los cubos centrales de 1 cm de lado. ¿Cuántos cubos de 1 cm de lado quedaron?



(a) 15

(b) 18

(c) 20

(d) 21

(e) 24

Problema 4.2. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E3, P1). Marichuy escribió números enteros positivos del 1 al N de forma consecutiva como sigue:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ \cdots\ N.$$

Usó el dígito 1 cincuenta y cuatro veces, y el dígito 2 veinticuatro veces. ¿Cuál es el valor de N?

(a) 54

(b) 124

(c) 78

(d) 122

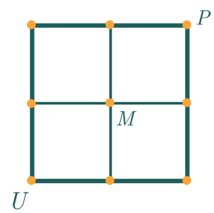
(e) Ninguna de las anteriores

4. 2. 2. Preguntas abiertas

Problema 4.3. (2.^{a} OMMEB-Ver., P6). A una competencia se inscribieron inicialmente 19 hombres y 11 mujeres. Deben formarse 8 equipos de tal forma que cada uno tenga el mismo número de personas e igual número de hombres y mujeres. ¿Cuántas personas deben inscribirse al club, como mínimo, para que esto sea posible?

Problema 4.4. (2.^{a} OMMEB-Ver., P8). De un rectángulo dividido en 40 cuadritos iguales, Sunya eligió una columna para colorearla, pero le quedaron varios cuadritos sin colorear y la cantidad de columnas no coloreadas es par. ¿Cuántos cuadritos quedaron sin colorear?

Problema 4.5. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E1, P9). Ulises vive en la casa ubicada en el punto U del siguiente mapa y Marichuy en el punto M. Ellos acordaron ver juntos una película el fin de semana. Para ello Ulises saldría de su casa y pasaría por Marichuy antes de ir a la tienda de películas situada en el punto P; luego regresarían juntos por cualquier camino que les llevara a la casa de Ulises a ver la película. Si de ida hacia la tienda de películas solo caminan a la derecha o arriba, y a la izquierda o abajo cuando van de regreso para la casa de Ulises, ¿de cuántas maneras pueden llevar a cabo lo anterior?

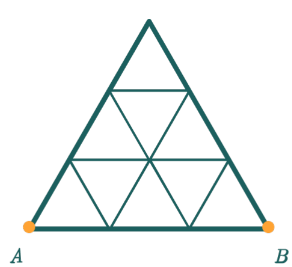


Problema 4.6. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P4). Se quiere poner en fila a siete personas. Cinco de ellas tienen bigote, cuatro usan lentes y solo una no tiene bigote ni usa lentes. ¿De cuántas maneras pueden acomodarse si la primera persona en la fila debe tener bigote y la última usar lentes?

Problema 4.7. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P6). A una fiesta en el mar asisten once pulpos que deciden saludarse simultáneamente. Considerando que cada pulpo tiene ocho tentáculos y su saludo consiste en tocar un tentáculo a la vez de cada uno, ¿cuántos saludos se dieron al mismo tiempo?

Problema 4.8. (5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P5). Jesús dice que un número es veracruzano si la suma de sus dígitos es divisible por su número de dígitos más uno. Por ejemplo, 2021 es veracruzano porque $2+0+2+1=5$ es divisible por $4+1$. Entonces, ¿cuántos números enteros positivos veracruzanos existen menores que 100?

Problema 4.9. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E3, P6). Hamsterio es el nombre del hámster de Ulises. Para entretener a Hamsterio, Ulises le construyó un laberinto como en la figura que sigue, donde cada línea suya representa un túnel. Si Ulises pone a Hamsterio en el punto A, las semillas para que coma en el punto B y para ir por ellas solo puede moverse en las direcciones $\longrightarrow$, $\nearrow$ y $\searrow$, ¿de cuántas formas puede ir Hamsterio por sus semillas?



Problema 4.10. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E3, P6). Ulises tiene un reloj digital cuya pantalla le muestra las horas y minutos cuanto la observa; por ejemplo, cuando su reloj le marca las $17{:}18$, significa que son las cinco de la tarde con dieciocho minutos. Si desde las $00{:}00$ hasta las $23{:}59$ Ulises anota en una libreta todos los tiempos con al menos un dígito 5 que aparece en la pantalla de su reloj, ¿cuántos tiempos registró Ulises en su libreta durante todo el día?

Problema 4.11. (5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E3, P7). En la siguiente cuadrícula Ulises pinta caminos iniciando con el cuadrito de la esquina superior izquierda y moviéndose luego hacia un cuadrito con el cual comparte un lado, sin pasar más de una vez por cada cuadrito del camino. Cada vez que Ulises se mueve, suma la cantidad que tenía con el número del cuadrito al cual se movió.

4	10	4	10	4	10
6	8	6	8	6	8
8	6	8	6	8	6
10	4	10	4	10	4
4	10	4	10	4	10
6	8	6	8	6	8

(a) ¿Será posible que Ulises obtenga 251 como suma total al dibujar algún camino por la cuadrícula?

(b) ¿Cuántos caminos hay que sumen 250?

Problema 4.12. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E4, P3). Ulises tiene siete cubos idénticos, cada uno con lados que miden 1 cm. Pegándolos todos, Ulises construyó una pieza como la que se muestra en la figura siguiente. ¿Cuántos cubos le hacen falta para completar un cubo cuyos lados midan 3 cm?

Problema 4.13. (4.^{a} OMMEB-Ver., N1, E4, P4). Un triángulo tiene lados cuyas medidas son números enteros, uno de ellos es 13 y el producto de los otros dos lados resulta en 231. ¿Cuáles son los posibles valores del perímetro del triángulo?

Problema 4.14. (5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E4, P2). Como broma, Tomás reorganizó los cajones del escritorio de su hermana. Sacó los cuatro cajones del escritorio y luego buscó ponerlos de vuelta en diferentes ranuras. Pero al final colocó exactamente uno de ellos en su ranura original. ¿De cuántas formas diferentes podría Tomás haberlo hecho?

4.3. Preguntas de conteo, nivel 2

Los problemas que se presentan a continuación formaron parte de los exámenes eliminatorios de la OMMEB en Veracruz. Para poder identificarlos se les ha asignado una notación como la siguiente: **5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E2, P3**; lo anterior significa que dicho ejercicio corresponde a la 5.^{a} OMMEB de Veracruz, del Nivel 2, del Examen selectivo 2, Problema 3.

El nivel 2 en la OMMEB refiere a sexto grado de primaria y primer año de secundaria.

4. 3. 1. Preguntas de opción múltiple

Problema 4.15. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E1, P3). Cada premio de cuatro se sortea para dárselo a una de dos personas. ¿Cuál es la probabilidad de que alguna de las dos personas se quede con todos los premios?

(a) $\frac{1}{8}$

(b) $\frac{1}{5}$

(c) $\frac{1}{4}$

(d) $\frac{1}{3}$

(e) $\frac{1}{2}$

Problema 4.16. (4.^{a} OMMEB-Ver., N2, E3, P3). Para proteger su castillo de enemigos, un rey tenía un dragón muy poderoso con varias cabezas, al cual si se le cortaba una de ellas le salían tres completamente nuevas. El inconveniente se presentaría cuando llegara a tener mil cabezas porque moriría. Un valiente soldado del pueblo enemigo decidió luchar contra el dragón y logró derrotarlo con 321 cortes de cabeza. ¿Cuántas cabezas poseía el dragón al comenzar la pelea?

(a) 361

(b) 679

(c) 360

(d) 160

(e) Ninguna de las anteriores

4. 3. 2. Preguntas abiertas

Problema 4.17. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E1, P7). Amira, Bernardo, Constancio, Dora y Eric fueron a una fiesta y allí se estrecharon la mano entre sí. Si Amira solo estrechó la mano de alguien una vez, Bernardo lo hizo dos veces, Constancio tres veces y Dora cuatro veces, ¿cuántas veces lo hizo Eric?

Problema 4.18. (5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E1, P6). Para poder acceder al tesoro guardado en una caja fuerte Roberto debe ingresar la contraseña adecuada. De antemano él sabe que necesita registrar en el orden adecuado tres de los siguientes símbolos: $\bigstar, \blacktriangle, \blacksquare, \clubsuit, \heartsuit$. Además, que en la contraseña un mismo símbolo puede aparecer varias veces, así como hay una cantidad impar de $\bigstar$ y una cantidad par de $\blacktriangle$. ¿Cuántas contraseñas puede construir Roberto para acceder al tesoro con las pistas que tiene?

Problema 4.19. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E2, P4). Renata y Uri juegan con doce cartas de memorama, de las cuales seis son parejas de cartas iguales. Explica por qué siempre que se repartan entre sí todas las cartas (seis cartas cada uno), ambos tendrán el mismo número de parejas de cartas iguales.

Problema 4.20. (4.^{a} OMMEB-Ver., N2, E2, P7). Una fábrica que produce bebidas de 7 sabores, fresa, naranja, sandía, uva, piña, zanahoria y limón, dispone de 7 colores de botellas para distribuirlas: rojo, naranja, morado, verde, azul, amarillo y negro. Por preferencias del público consumidor, las botellas de color rojo solo se usan para las bebidas de sabor sandía o fresa, las de color naranja solo para las de naranja o zanahoria, mientras que las botellas de los otros colores no tienen restricción de uso. Bajo las condiciones mencionadas, ¿de cuántas formas puede la fábrica embotellar las bebidas?

Problema 4.21. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E3, P4). Inicialmente Ulises tenía una bolsa con solo canicas rojas y azules. Después Esteban le agregó canicas rojas hasta que un tercio del total de canicas en su bolsa fueron azules. Luego Marichuy le añadió canicas amarillas hasta que un quinto del total de canicas en su bolsa fueron azules. Si el número de canicas azules en la bolsa de Ulises es 10, ¿cuántas canicas agregó Marichuy a su bolsa?

Problema 4.22. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E4, P7). Brenda anotó en su cuaderno una lista de números enteros positivos diferentes. Exactamente dos de ellos son pares y trece son divisibles por 13. Si M es el número más grande de esa lista, ¿cuál es el menor valor posible para M?

4.4. Preguntas de conteo, nivel 3

Los problemas que se presentan a continuación formaron parte de los exámenes eliminatorios de la OMMEB en Veracruz. Para poder identificarlos se les ha asignado una notación como la siguiente: **5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E2, P3**; lo anterior significa que dicho ejercicio corresponde a la 5.^{a} OMMEB de Veracruz, del Nivel 3, del Examen selectivo 2, Problema 3.

El nivel 3 en la OMMEB refiere al segundo año de secundaria.

4. 4. 1. Preguntas de opción múltiple

Problema 4.23. (4.^{a} OMMEB-Ver., N3, E2, P2). Una fábrica marca sus distintos productos con códigos de barras negras y blancas alternadas, comenzando y terminando en barras negras. Cada barra tiene 1 o 2 unidades de ancho, de modo que el ancho total del código es de 8 unidades. Si cada código siempre se lee de izquierda a derecha, ¿cuántos códigos diferentes se pueden construir de dicha forma?

(a) 7

(b) 10

(c) 16

(d) 17

(e) Ninguna de las anteriores

Problema 4.24. (5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E3, P2). ¿Cuál es el valor de la suma de los dígitos de todos los números de cuatro cifras, tales que el producto de los dígitos de cada uno de ellos sea 180?

(a) 86

(b) 1032

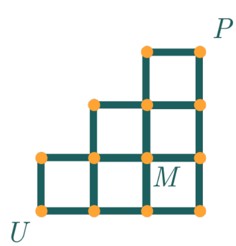
(c) 1452

(d) 2064

(e) Ninguna de las anteriores

4. 4. 2. Preguntas abiertas

Problema 4.25. (4.^{a} OMMEB-Ver., N3, E1, P9). Ulises vive en la casa ubicada en el punto U del siguiente mapa y Marichuy en el punto M. Ellos acordaron ver juntos una película el fin de semana. Para ello Ulises saldría de su casa y pasaría por Marichuy antes de ir juntos a la tienda de películas situada en el punto P; luego regresarían por cualquier camino que les llevara a la casa de Ulises a ver la película. Si de ida hacia la tienda de películas solo caminan a la derecha o arriba, y a la izquierda o abajo cuando van de regreso para la casa de Ulises, ¿de cuántas maneras pueden llevar a cabo lo anterior?



Problema 4.26. (3.^{a} OMMEB-Ver., N3, E2, P5). Con las letras A, B, C, D, E y F se forman arreglos que ocupan solo tres de estas letras sin repetirlas. Por ejemplo AEF es uno de dichos arreglos, mismos que se ordenan alfabéticamente y se enumeran. ¿Cuál es el arreglo que se encuentra en el lugar 70?

Problema 4.27. (5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E2, P5). ¿Cuántos números con tres dígitos distintos y no nulos se pueden formar, tales que sus dígitos se ubiquen en orden creciente?

Problema 4.28. (3.^{a} OMMEB-Ver., N3, E3, P7). Ulises vive en un país de un planeta muy lejano, donde el nombre de sus habitantes se forman solamente con las letras E, I, L, S y U, las cuales pueden ser repetidas para formar tales nombres. En la oficina del gobernador hay libros con los nombres de estos habitantes: todos aquellos con una sola letra se encuentran en el libro 1, los de dos letras en el libro 2, etc.; por ejemplo, ULISES aparece en el libro 6. Si los nombres de los habitantes están ordenados alfabéticamente, ¿cuál es el nombre que se ubica en la posición 2019 del libro 6?

Problema 4.29. (3.^{a} OMMEB-Ver., N3, E4, P6). Tres vértices de un cubo forman un triángulo. ¿Cuántos de esos triángulos no tienen todos sus vértices sobre una de las caras del cubo?

Problema 4.30. (4.^{a} OMMEB-Ver., N3, E4, P3). ¿Cuántos números de cuatro dígitos existen, tales que el producto de sus dígitos sea 36?

4.5. Soluciones a los problemas de conteo

4. 5. 1. Nivel 1

Solución del problema 4.1. La respuesta es (c).

Dividamos el cubo grande en capas: la de enfrente, central y de atrás. Tanto en la capa de enfrente como la de atrás se quitaron solo un cubito, mientras que en la central se quitaron cinco cubitos, quedando solo los de las esquinas de ese nivel. Así, $27 - 1 - 5 - 1 = 20$ cubitos.

Solución del problema 4.2. La respuesta es (e).

En la siguiente tabla se muestra una manera ordenada de ir contando la cantidad de dígitos 1 y 2 por cada conjunto de números.

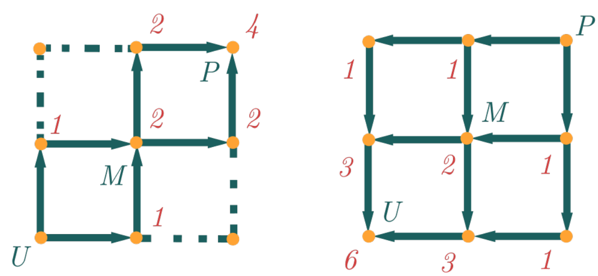
Números	Dígito 1	Dígito 2
$1-9$	1	1
$10-19$	11	1
$20-29$	1	11
$30-39$	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$90-99$	1	1
$100-109$	11	1
$110-119$	21	1
$120-122$	4	4
Total	56	26

De allí concluimos que no existe N con dichas características, puesto que hasta 119 hay 52 dígitos 1, el 120 aporta uno más y el 121 aporta otros dos, por lo tanto, nunca encontraremos 54 dígitos 1.

Solución del problema 4.3. En principio, para lograr el mismo número de hombres y de mujeres hace falta 8 mujeres, lo cual resulta en un total de 38 personas. Luego, como debe haber 8 equipos, el número de personas debe ser múltiplo de 8, pero $\frac{40}{8} = 5$, así que no podría producirse la igualdad de hombres y de mujeres en cada equipo. Entonces se procede a juntar 48 personas para que en cada equipo de los 8 queden 3 hombres y 3 mujeres. Así mismo $48 - (19 + 11) = 18$, es decir, faltan 5 hombres y 13 mujeres.

Solución del problema 4.4. Las únicas posibilidades de dividir el rectángulo son cuadrículas de 1×40, 2×20, 4×10 y 5×8, donde una de las dimensiones corresponda a la cantidad de renglones y la otra a la de columnas. No obstante, como la cantidad de columnas debe ser impar y mayor que uno, la única respuesta posible es que se haya dividido en 5 columnas y 8 renglones. De esta manera, Sunya iluminó una columna con 8 cuadritos.

Solución del problema 4.5. Contemos los caminos posibles a cada uno de los puntos desde U, pasando por M, para llegar a P, considerando los puntos por los que no se puede pasar. Por lo tanto, de ida hay 4 formas de llegar a P, mientras que de regreso hay 6 formas de volver a U desde P, dado que se puede emplear cualquier camino. Entonces, por la regla del producto se concluye que hay $4 \times 6 = 24$ formas de llevar a cabo el recorrido solicitado.



Solución del problema 4.6. A partir de que una persona no tiene bigote ni usa lentes, se deduce que tres usan lentes y poseen bigote, mientras una sola usa lentes y dos tienen bigote. Así obtenemos los siguientes casos:

- Caso 1. Si para la primera persona escogemos una de las tres personas con solo bigote y lentes, para la última persona tenemos tres opciones, mientras para las cinco personas restantes $5!$ formas. En consecuencia, obtenemos un total de $3 \times 3 \times 5! = 1080$ maneras de acomodarlas.

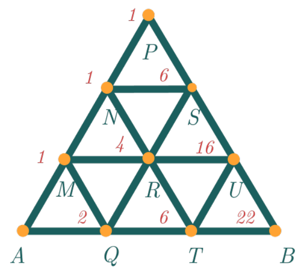
- Caso 2. Si para la primera persona escogemos una de las dos personas con únicamente bigote, tenemos cuatro opciones para la última persona y $5!$ formas de ordenar las otras cinco personas. Por ende, nos resulta un total de $2 \times 4 \times 5! = 960$ formas para acomodarlas.

De lo anterior, existen $1080 + 960 = 2040$ formas de acomodar las siete personas.

Solución del problema 4.7. Cada pulpo tiene ocho tentáculos, así que con cada uno saludará a un pulpo, es decir, cada pulpo saludará a ocho pulpos. Pero cada saludo se cuenta dos veces porque es un saludo mutuo, por consiguiente, concluimos que se efectuarán $\frac{11 \times 8}{2} = 44$ saludos.

Solución del problema 4.8. La respuesta es 34 números. Esto es, un número de un dígito es veracruzano si es par, por lo que 2, 4, 6 y 8 cumplen tal condición. Luego, un número de dos dígitos es veracruzano si es múltiplo de tres, por lo que existen 30 múltiplos de 3. Sumadas ambas cantidades, resulta un total de 34 números veracruzanos menores que 100.

Solución del problema 4.9. La forma usual de resolver este tipo de problemas es contar los caminos que se pueden trazar para llegar a cada punto del circuito. Al punto M solo llegamos desde el A, por lo que solo hay un camino.



Por otro lado, al punto N solo llegamos desde el M y al P solo desde el N, entonces para ambos solo existe un camino. Al punto Q se puede llegar desde el A y M, es decir, dos caminos. Mientras, al punto R se llega desde el Q, M y N, así que sumados los caminos para cada punto, hay cuatro caminos. Luego, al punto S se puede llegar desde el R, N y P, por tanto, existen seis caminos; al punto T desde el R y Q, por eso hay seis caminos al T; al punto U desde el S, R y T, entonces hay 16 caminos, así como al B desde el T y U. En consecuencia, 22 son los caminos que puede tomar Hamsterio para llegar a sus semillas.

Solución del problema 4.10. Notemos que solo en dos lapsos aparece un 5 en las horas establecidas: desde las $05{:}00$ hasta las $05{:}59$ horas y desde las $15{:}00$ hasta las $15{:}59$ horas. Por lo tanto, durante estas dos horas Ulises hace 60 anotaciones en su libreta, resultado de las veces que cambiaron los números pero hubo al menos un 5 en la pantalla.

En las 22 horas restantes, el 5 aparece en los minutos 05, 15, 25, 35 y 45, más las veces en los minutos desde 50 a 59, así que por cada hora Ulises realiza 15 anotaciones.

Por lo tanto, en total Ulises hace $(2 \times 60) + (22 \times 15) = 450$ anotaciones.

Solución del problema 4.11. Las respuestas a cada inciso, (a) y (b), son no es posible y ningún camino, respectivamente.

(a) No es posible, ya que cada vez que Ulises se mueve a un cuadrito con el cual comparte un lado suma un número par. Como inició con la cantidad 4, que es par, entonces la suma por cualquier camino será par. Al ser 251 impar, no es posible encontrar un camino que sume dicha cantidad.

(b) Ningún camino porque la suma de todos los números de la cuadrícula es 252, por lo que podemos llegar a 252 usando todos los cuadritos una sola vez. Luego, si Ulises pudiera sumar 250, debería llegar a 252 con otro paso, pero en la cuadrícula no hay 2, por lo tanto, no existe ningún camino que sume dicha cantidad.

Solución del problema 4.12. La respuesta es 20 cubos. Esto es, para tener un cubo con lados de $3\ \mathrm{cm}$ necesitaríamos $3 \times 3 \times 3 = 27$ cubos, por lo que nos hacen falta 20 cubos.

Solución del problema 4.13. Tenemos que $231 = 3 \times 7 \times 11$. Luego, los posibles valores de los lados del triángulo serían las parejas $(1, 231)$, $(3, 77)$, $(7, 33)$ y $(11, 21)$. Notemos que en la primer pareja $1+13 = 14 < 231$; en la segunda $13+3 = 16 < 77$ y en la tercera $7+13 = 20 < 33$; es decir, en ninguna de estas opciones se cumple que la suma de dos lados es mayor que el tercero, por lo que no podemos generar un triángulo con esas medidas. Para la última pareja, $11 + 13 = 24 > 21$, $11 + 21 = 32 > 13$ y $21 + 13 = 31 > 11$, por lo que con estas medidas sí podemos formar un triángulo. De aquí que el perímetro de este triángulo sea $13 + 11 + 21 = 45$.

Solución del problema 4.14. Para cada uno de los cuatro cajones que pudieron haber quedado en su lugar original tenemos que solo hay dos formas de acomodar los tres cajones restantes, sin ninguno quedar en su lugar original. Por lo que existen 8 formas distintas en que Tomás pudo haber arreglado los cajones de su hermana.

4. 5. 2. Nivel 2

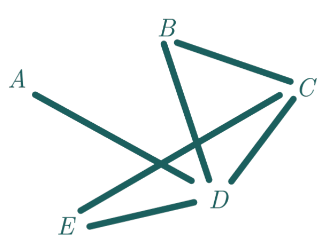
Solución del problema 4.15. La respuesta es (a).

El primer premio puede darse a cualquiera de las dos personas. Después cada uno de los otros tres premios tiene probabilidad de un medio de entregarse a la misma persona, así que la respuesta resulta de $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Solución del problema 4.16. La respuesta es (e).

Notemos que como logró matar al dragón, este último debió llegar a 1000 o más cabezas. Cada vez que el soldado le cortó una cabeza, le aparecieron dos más, así que antes del último corte el dragón tuvo que tener 998 o 999 cabezas. De esta forma, si tenía 998 antes del último corte, inicialmente tenía $998 - 2(320) = 358$ cabezas. Para 999, inicialmente tenía $999 - 2(320) = 359$ cabezas.

Solución del problema 4.17. Como Dora saludó a todos, Amira solo la saludó a ella. Luego, Constancio saludó a tres, entonces saludó a todos menos a Amira. Además, Bernardo saludó a Constancio y Dora (y a nadie más), por ende, Eric saludó a dos personas. Lo anterior lo podemos ilustrar en un esquema como el que se muestra a continuación.



Solución del problema 4.18. La respuesta es 31. Esta la hallamos por medio de los siguientes casos:

- Caso 1. Cuando tenemos solo un símbolo de ★ y ningún símbolo de ▲. Nos importa el orden, entonces existen tres posibles formas de poner el símbolo de ★, quedándonos dos espacios donde podemos colocar cualquier otro símbolo que no sea ★ o ▲. Por ende, por cada forma de ubicar la ★ tenemos 9 contraseñas, resultando en un total de $3(9) = 27$ contraseñas para este caso.

- Caso 2. Cuando tenemos una ★ y dos ▲. Si contamos las formas de acomodar el ▲ solo colocamos la ★ en el espacio que sobra, por lo tanto, si los dos ▲ están juntos, tenemos dos posibilidades; si están separados, tenemos solo una posibilidad. Por eso para este caso hay 3 contraseñas.

- Caso 3. Con tres ★ y ningún ▲, solo tenemos una contraseña.

Por lo tanto, en total tenemos que hay $27 + 3 + 1 = 31$ contraseñas.

Solución del problema 4.19. Si Uri tiene k parejas de cartas iguales y m cartas sin pareja, entonces Renata también tendrá tanto m cartas sin pareja como k parejas.

Solución del problema 4.20. Tanto para el color rojo como para el naranja tenemos dos posibilidades. Dado que ya usamos dos colores, nos quedan 5 colores y 5 sabores que acomodar. Así, para el primer color contamos con 5 posibilidades; para el segundo 4 porque ya usamos uno, y así sucesivamente. Por lo tanto, la fábrica puede embotellar las bebidas de $2 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 480$ formas.

Solución del problema 4.21. Sean x, y, z la cantidad respectiva de canicas rojas, azules y amarillas, así como a la de canicas rojas agregadas a la bolsa. De la primera parte del enunciado tenemos que $\frac{y}{x+y+a} = \frac{1}{3}$, donde $2y = x + a$. Ahora, de la segunda parte obtenemos que $\frac{y}{x+y+z+a} = \frac{1}{5}$, donde $x + z + a = 4y$. Al sustituir la primera expresión en la segunda nos resulta que $2y = z$, por lo tanto, $z = 20$ canicas amarillas que Marichuy agregó a la bolsa.

Solución del problema 4.22. La lista más pequeña que Brenda pudo anotar es una con trece números, en la cual todos deberían ser múltiplos de 13. Como a lo más dos de ellos pueden ser pares, entonces al menos once de ellos deben ser impares. La lista más pequeña quedaría así: 13×1, 13×2, 13×3, 13×4, 13×5, 13×7, 13×9, 13×11, 13×13, 13×15, 13×17, 13×19, 13×21. Por lo tanto, $M = 13 \times 21 = 273$ es el número buscado.

4. 5. 3. Nivel 3

Solución del problema 4.23. La respuesta es (d).

Notemos que como los códigos de barras empiezan y terminan en color negro, entonces el número de barras es impar. Luego cambiaremos el problema para calcular la cantidad de formas de obtener 8 mediante la suma de números 1 y 2 con un número impar de sumandos. Si usamos tres sumandos iguales a 2 lo más que podemos obtener es 6, y con nueve sumandos iguales a 1, entonces obtenemos 9, lo cual se pasa del número que queremos. Por lo tanto, tenemos los siguientes casos:

- Caso 1. Con cinco sumandos, así solo podemos lograr la suma 8 con tres sumandos iguales a 2 y dos sumandos iguales a 1. Ahora debemos ver de cuántas formas podemos acomodar los sumandos. Acomodamos primero los números iguales a 2 como sigue:
$$-2-2-2-.$$
Luego, en los espacios colocamos los sumandos iguales a 1, juntos o separados. Si juntos, entonces en cada espacio generamos una diferente suma (código), por lo que tenemos cuatro posibilidades. Si separados, entonces podemos colocar el primer 1 en el primer espacio, y para el otro 1 tenemos tres posibilidades. Si colocamos el primer 1 en el segundo espacio, tenemos dos posibilidades para el segundo. Si colocamos el primer 1 en el tercer espacio, solo nos queda un espacio para el otro 1. Por lo tanto, hay $4+3+2+1=10$ códigos diferentes para este caso.

- Caso 2. Con siete sumandos, podemos utilizar seis sumandos iguales a 1 y solo un sumando igual a 2. Colocamos primero los sumandos iguales a 1, de la siguiente manera:
$$-1-1-1-1-1-1-.$$
Luego acomodamos el único sumando igual a 2, que tiene siete posibilidades, por lo tanto, existen 7 códigos diferentes para este caso.

De esta manera, tenemos un total de $10+7=17$ códigos diferentes.

Solución del problema 4.24. La respuesta es (c).

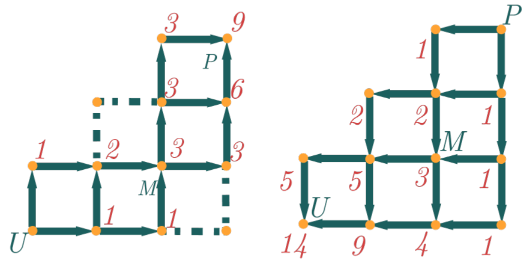
Notemos que $180=2^2\cdot 3^2\cdot 5$. Pero como solo nos interesa encontrar la suma de todos los dígitos, basta que encontremos las combinaciones de cuatro dígitos que multiplicados nos den 180 para saber cuántos números hay de cada una de estas combinaciones. Luego tenemos los siguientes tipos de números:

- Si sus dígitos son $2,2,9,5$, entonces hay $\frac{4!}{2}=12$ números distintos.
- Si sus dígitos son $4,9,5,1$, entonces hay $4!=24$ números distintos.
- Si sus dígitos son $4,3,3,5$, entonces hay $\frac{4!}{2}=12$ números distintos.
- Si sus dígitos son $6,6,5,1$, entonces hay $\frac{4!}{2}=12$ números distintos.
- Si sus dígitos son $6,2,3,5$, entonces hay $4!=24$ números distintos.

Por lo tanto, la suma de los dígitos resulta de

$$\begin{aligned}12(2+2+9+5)+24(4+9+5+1)+12(4+3+3+5)&\\+12(6+6+5+1)+24(2+3+5+6)&\\&=12(18)+24(19)+12(15)+12(18)+24(16)\\&=1452.\end{aligned}$$

Solución del problema 4.25. Contemos los caminos que hay hacia cada uno de los puntos desde U, pasando por M, para llegar a P, observando que existen algunos puntos por los que no se puede pasar. Por lo tanto, de ida hay 9 formas de llegar a P, mientras que de regreso 14 formas de volver a U desde P porque se puede utilizar cualquier camino. Así, por la regla del producto obtenemos que existen $9 \times 14 = 126$ formas de llevar a cabo el recorrido requerido.



Solución del problema 4.26. Notemos que si fijamos la primera letra del arreglo nos resultan cinco opciones para escoger la segunda letra y cuatro para la tercera. Entonces, por la regla del producto obtenemos que hay 20 arreglos. Como estos arreglos están ordenados alfabéticamente y nos interesa averiguar cuál se encuentra en la posición 70, tenemos que hasta la letra D hay 80 arreglos, también que el arreglo que buscamos inicia con D. Ahora veamos lo que pasa si fijamos la segunda letra. Por el argumento anterior sabemos que solo tenemos cuatro opciones para la tercera letra, y al estar organizados alfabéticamente hallamos que DBF es el arreglo 68, por lo tanto, DCB está en la posición 70.

Solución del problema 4.27. Contemos cuántos subconjuntos de tres números podemos formar del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Por ende, obtenemos que

$$C_3^9 = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{6} = 84$$

números cumplen las condiciones dadas.

Solución del problema 4.28. Ya que los nombres están ordenados alfabéticamente, contaremos primero los que empiezan con la letra E. Notemos además que al poder repertirlas, tenemos cinco opciones de escoger cada una de las letras que nos faltan. Entonces, por la regla del producto obtenemos que $5^5 = 3125$ nombres empiezan con E, por ende, el nombre que buscamos empieza con esa misma letra.

Ahora contemos la cantidad de nombres posibles al fijar la segunda letra. Por un razonamiento análogo al párrafo anterior, tenemos $5^4 = 625$ nombres con sus dos primeras letras fijas, por lo tanto, a partir del nombre 1876 están aquellos que empiezan con ES, en consecuencia, el nombre que buscamos empieza con estas dos primeras letras.

Fijamos la tercera letra y contamos cuántos nombres podemos obtener. Al seguir un razonamiento igual a los anteriores, calculamos $5^3 = 125$ nombres. Como el nombre 1876 empieza con ESE, el nombre 2001 deberá iniciar con ESI y el 2126 con ESL. Luego, el nombre 2019 tiene al principio las letras ESI. Al fijar la cuarta letra sabemos que hasta el nombre 2025 tenían como iniciales las letras $ESIE$.

Al fijar la quinta letra, nos quedan solo cinco opciones para la última letra, por eso observamos que los nombres con $ESIES$ se ubican desde la posición 2015 a la 2020, por ende, $ESIESS$ es el nombre que buscamos.

Solución del problema 4.29. Para construir un triángulo es necesario escoger cualesquiera tres vértices. Como son ocho vértices, el número de triángulos que podemos construir es $8 \times 7 \times 6$. Pero no nos importa el orden en el que vayamos a elegir los vértices, así que la cantidad anterior la dividimos entre 6 y obtenemos un total de 56 triángulos. Ahora, restemos los triángulos formados en las caras. Si por cada cara se forman 4 triángulos y son 6 caras, restaremos 24. De esta manera nos resulta un total de 32 triángulos.

Solución del problema 4.30. Como $36 = 2^2 \cdot 3^2$, los números buscados solo pueden tener los dígitos 1, 2, 3, 4, 6 y 9, bajo los siguientes casos:

- Caso 1. Números compuestos por 2 y 3. En este caso tenemos seis números: 2233, 2323, 2332, 3322, 3232 y 3223.

- Caso 2. Números compuestos por 1 y 6. Como en el caso anterior, obtenemos seis números: 1166, 1616, 1661, 6611, 6161 y 6116.

- Caso 3. Números compuestos por 1, 4 y 9. Para contarlos, primero acomodamos el 9 en alguno de los cuatro lugares, posteriormente colocamos el 4 en uno de los tres lugares restantes, mientras en los otros dos lugares ubicamos dígitos iguales a 1. Así, tenemos doce números: 9411, 9141, 9114, 4911, 1941, 1914, 4191, 1491, 1194, 4119, 1419 y 1149.

- Caso 4. Números compuestos por 1, 2, 3 y 6. Para contarlos, primero fijamos el primer dígito del número, resultándonos en cuatro opciones para ese número; para el segundo, tres opciones; para el tercero, dos y para el último ya está determinado en una sola opción. Por lo tanto, tenemos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ números: 1236, 1263, 1326, 1362, 1623, 1632, 2136, 2163, 2316, 2361, 2613, 2631, 3126, 3162, 3216, 3261, 3612, 3621, 6123, 6132, 6213, 6231, 6312 y 6321.

Luego, en total resulta que $6 + 6 + 12 + 24 = 48$ números cumplen las condiciones del problema.

Capítulo 5
Lógica

5.1. Definiciones y resultados básicos

5. 1. 1. Técnicas variadas de resolución de problemas

En el presente capítulo revisaremos algunas técnicas de resolución de problemas matemáticos no tan claramente catalogadas, pues incluyen desde soluciones por casos hasta resolución de problemas lógicos, geométricos y de patrones. Esto en beneficio de pensar ordenadamente y afrontar diversos problemas relacionados con las matemáticas. Si se desea profundizar en los temas abordados aquí, se recomienda consultar los libros de Mayorga Cruz *et al*. (2019), Neve Jiménez y Rosales Ortiz (2017), Soifer (2009) y Zubieta Russi (2002).

Es común oír y pronunciar afirmaciones como "el caballo es blanco", "todas las fichas de dominó se caen", "todos los príncipes eran sapos", "algunas piedras son suaves" y "si el agua es verde, entonces es agua de limón". Lo que las caracteriza (también se les llama proposición o premisa) es que podemos discernir si son verdaderas o falsas. A continuación se describe formalmente tal concepto.

Definición 39. Una **proposición o premisa** es una frase que afirma o niega algo.

De acuerdo con dicha definición, expresiones de admiración, preguntas y órdenes no son proposiciones. Consideremos lo siguiente:

La mamá de Pedro dice: "todos los campeones son buenos en matemáticas". Enseguida Pedro responde: "yo soy bueno en matemáticas. Por lo tanto, soy un campeón". Esta implicación, ¿es correcta o incorrecta? Para responder hacemos el siguiente análisis: lo que afirma la mamá de Pedro es que si alguien es campeón, entonces es bueno en matemáticas, pero es una implicación que no necesariamente se puede invertir, es decir, desde lo que dicho por la mamá de Pedro no podemos afirmar que si alguien es bueno en matemáticas, entonces es un campeón. Por lo tanto, la afirmación de Pedro no es correcta, aunque pude ser cierta.

Para resolver algunos problemas en matemáticas basta pensar en alguna estrategia que podemos describir como lógica. Varios problemas de este tipo se presentan como acertijos, por ello pueden ser resueltos mediante cierto razonamiento. En los siguientes ejemplos se muestran distintos razonamientos que nos conducen a solucionar algunos problemas, de hecho, de distintas maneras.

► Ejemplos

1. En un pueblo viven tres tipos de personas: unas que son mitómanas (siempre mienten), otras veraces (siempre dicen la verdad) y otras más normales (no siempre dicen la verdad ni siempre mienten). Al llegar al pueblo te encuentras con dos de sus habitantes: Ana (quien te dice: Sofía es mitómana) y Sofía (quien te dice: Ana es veraz). Determina que si Sofía es mitómana, entonces Ana no es normal.

   Partamos de que Sofía es mitómana, entonces lo que dice es mentira, es decir, Ana no es veraz. Como Sofía es mitómana y Ana dice que Sofía es mitómana, entonces Ana está diciendo una verdad, por lo que Ana no es mitómana, luego Ana es normal.

2. Al continuar tu camino por el pueblo te encuentras con otros tres habitantes: Alex (quien te dice: Beto es mitómano), Beto (quien te dice: Carlos es mitómano) y Carlos (quien te dice: Alex es mitómano). Determina que si Alex es veraz, entonces Carlos es normal.

   Como Alex es veraz, lo que dice es cierto y Beto es mitómano. Luego, lo que dice Beto es mentira, así que Carlos no es mitómano. Por otro lado, Carlos dice que Alex es mitómano pero Alex es veraz, por lo que Carlos está mintiendo, entonces Carlos no es veraz. Así concluimos que Carlos sí es normal.

3. Tienes 8 pelotas idénticas en forma, tamaño, color y textura, excepto que una de ellas pesa más que el resto. Usando únicamente dos veces una balanza, ¿cómo puedes saber cuál es la pelota más pesada?

   Un primer intento, dividir las 8 pelotas en dos montones de 4 pelotas cada uno. Al colocar dichos montones en la balanza, uno de ellos pesará más que el otro y allí estará la pelota con mayor peso. Sin embargo, no hay manera (que no sea al azar) de usar la balanza una sola vez más para saber cuál es la más pesada, por lo que debemos buscar otra estrategia. Un segundo intento, en lugar de dos montones de 4 pelotas, hacemos tres montones: dos de 3 pelotas y uno de 2 pelotas. En la balanza comparamos primero los dos montones de 3 pelotas. Si pesan lo mismo, entonces el montón con 2 pelotas debe contener la más pesada, así que usamos la balanza por segunda vez para determinar cuál es. Por el contrario, si en la balanza uno de los montones de 3 pelotas pesa más, entonces entre esas 3 pelotas está la más pesada. Por eso usamos la balanza por segunda vez con dos de esas 3 pelotas y la que pese más será la más pesada, o bien si pesan lo mismo, entonces la pelota sin usar es la más pesada.

5. 1. 2. Divide y vencerás

En varios de los problemas matemáticos, el divide y vencerás resulta ser muy útil. A este método se le llama formalmente solucionar por casos. Por ejemplo, si queremos verificar que una propiedad es cierta para los números naturales del 1 al 999, primero lo podemos hacer para los números naturales de una cifra; luego para los de dos cifras y finalmente para los de tres. Practiquemos este método con los siguientes ejemplos, uno de conteo y otro de teoría de números.

► Ejemplos

1. La mamá de Miguel, Julio y Toño desea repartirles cinco paletas, ¿de cuántas formas se las puede repartir? (Puede ser que alguno se quede sin paleta).

   Para determinar el número de maneras en que la mamá puede repartir las paletas se analizarán los siguientes casos:

   - Caso 1. A uno de los hijos le tocan las cinco paletas. En este caso habrá 3 formas de repartirlas: las cinco paletas le tocan a Miguel, a Julio o a Toño.
   - Caso 2. A uno de los hijos le tocan cuatro paletas y la paleta restante es para alguno de los otros hijos. Como hay 3 maneras de dar cuatro paletas a uno de los tres hijos y 2 de entregar la paleta restante a uno de los dos hijos, existirán $(3)(2) = 6$ formas de repartir las paletas.
   - Caso 3. A uno de los hijos le tocan tres paletas. Como hay 3 maneras de dar las tres paletas a uno de los tres hijos y también 3 de entregar las dos paletas restantes a los otros dos hijos, existirán $(3)(3) = 9$ formas de repartir las paletas.
   - Caso 4. A dos de los hijos le tocan dos paletas cada uno y al restante le toca una paleta. Aquí el número de formas está determinado por las maneras de darle a uno de los hijos una paleta (pues automáticamente a los otros dos hijos les corresponden dos paletas), así que tenemos 3 formas de repartir las paletas.

   Al considerar todos los casos posibles, la mamá tiene 21 formas de repartir las paletas a sus tres hijos.

2. Prueba que para cualquier número natural n, la expresión $n^3 + 2n$ siempre es un múltiplo de 3.

   En este ejemplo debemos recordar las propiedades de divisibilidad trabajadas previamente. Necesitamos que la expresión sea múltiplo de 3, por eso desarrollaremos los casos en torno a cuando n pueda dejar residuo 0, 1 o 2 al dividirlo entre 3.

   - Caso 1. Si n deja residuo 0 al dividirlo entre 3, es decir, n es múltiplo de 3, entonces lo podemos escribir de la forma $n = 3k$, para algún natural k. Hacemos las operaciones y obtenemos:

     $$n^3 + 2n = (3k)^3 + 2(3k) = 3(9k^3 + 2k).$$

     Así, la expresión $n^3 + 2n$ es un múltiplo de 3.
   - Caso 2. Si n deja residuo 1 al dividirlo entre 3, entonces lo podemos escribir de la forma $n = 3k+1$, para algún natural k. Hacemos las operaciones

y obtenemos:

$$n^3 + 2n = (3k + 1)^3 + 2(3k + 1) = 3(9k^3 + 9k^2 + 5k + 1).$$

Así, la expresión $n^3 + 2n$ es un múltiplo de 3.

- Caso 3. Si n deja residuo 2 al dividirlo entre 3, entonces lo podemos escribir de la forma $n = 3k+2$, para algún natural k. Hacemos las operaciones y obtenemos:

$$n^3 + 2n = (3k + 2)^3 + 2(3k + 2) = 3(9k^3 + 18k^2 + 14k + 4).$$

Así, la expresión $n^3 + 2n$ es un múltiplo de 3.

5. 1. 3. Encontrando patrones

En varios de los problemas planteados en matemáticas se presentan recurrencias de ciertos números, símbolos o propiedades. Una vez identifiquemos esas recurrencias o patrones, podremos inducir los términos posteriores.

► **Ejemplos**

1. Considera la siguiente sucesión de figuras y determina cuántos puntos tendrá la figura número 7.

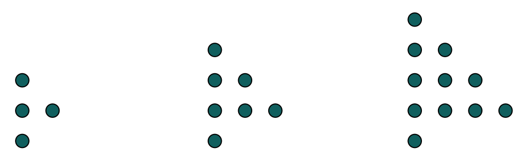


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Primero notemos que una figura es la anterior a la que se le ha aumentado una diagonal en la parte superior. La figura 1 está conformada por cuatro puntos y para obtener la figura 2 se le aumentaron tres puntos a la 1, quedando $4+3 = 7$ puntos de la figura 2. Luego, para la figura 3 se le aumentaron cuatro puntos a la 2, quedando $4+3+4 = 11$ puntos de la figura 3. De ese modo, para obtener la figura 4 se le aumentarán cinco puntos a la figura 3 y así sucesivamente. Por lo que en la figura 7 se aumentarán ocho puntos a la figura 6, quedando $4 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 37$ puntos, los cuales conformarán la figura 7.

2. Considera la sucesión de residuos formada al dividir entre 5 los números pares mayores que 7, a fin de que respondas: ¿qué número se encuentra en la posición 2021?

Ordenemos los enteros pares mayores que 7 como sigue:

$$8, 10, 12, 14, 16, 18, \ldots$$

Al dividir 8 entre 5 obtenemos un primer residuo con valor de 3; al dividir 10 entre 5 obtenemos 0; al dividir 12 entre 5 obtenemos 2. Continuamos ese proceso hasta llegar a la siguiente sucesión de residuos:

$$3, 0, 2, 4, 1, 3, 0, \ldots$$

De lo anterior se observa que los primeros cinco números de la sucesión se repetirán periódicamente. Al dividir 2021 entre 5 nos queda residuo de 1, por lo que el residuo en la posición 2021 será 3.

5. 1. 4. Principio de inducción matemática

Si colocamos fichas de dominó una tras otra en una fila, al estar lo suficientemente cerca una de la siguiente podríamos pensar que al tirar la primera ficha, esta tirará a la segunda que, a su vez, tirará a la tercera, etc., hasta que se caigan todas las fichas que teníamos en la fila.

Tal idea es una interpretación del principio de inducción matemática, el cual describimos a continuación.

Principio de inducción matemática

A una propiedad de números naturales la denotaremos como $P(n)$.

1. Base de la inducción. La propiedad es verdadera para 1, es decir, $P(1)$ es verdadera.
2. Paso inductivo. Suponer que la propiedad $P(k)$ es verdadera para cierto valor k y de allí probar que la propiedad $P(k+1)$ es verdadera.

La conclusión de los dos puntos anteriores es que la propiedad $P(n)$ es verdadera para todos los números naturales n.

En el ejemplo de las fichas de dominó, la propiedad $P(n)$ correspondería a que “la ficha de dominó en la posición n se cae”. Usaremos el principio de inducción matemática para comprobar que esta propiedad es verdadera para todos los números naturales n. La justificación consistiría en comprobar, en primer lugar, la base de inducción $P(1)$, la cual es válida porque tiramos la primera ficha. En segundo lugar debemos comprobar el paso inductivo, el cual se sigue del hecho de que se cae la primera ficha, luego la segunda, luego la tercera, etcétera hasta llegar a la ficha k que tumbará la ficha $k+1$. Por ello concluimos que todas las fichas de dominó caerán.

▶ Ejemplos

1. Usaremos el principio de inducción matemática para probar que para cualquier entero positivo n, se tiene que $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$.

   Primero, comprobemos la base de la inducción, es decir, que la propiedad es válida para $n=1$, resultando que efectivamente con este valor llegamos a la ecuación $1=1^2=1$.

   Para el paso inductivo, supongamos que la propiedad es válida para $n=k$, es decir, que es cierta la siguiente identidad: $1+3+5+7+\cdots+(2k-1)=k^2$.

   Del paso inductivo anterior debemos buscar una manera de llegar a la expresión para $k+1$. En este caso, probemos que

   $$1+3+5+7+\cdots+(2k-1)+\color{red}{(2(k+1)-1)}=(k+1)^2.$$

   La expresión en rojo es el dato adicional que tenemos en la fórmula para $n=k+1$. Al realizar las operaciones obtenemos: $(2(k+1)-1)=2k+1$, el cual es el impar que le sigue a $2k-1$. Así que debemos sumar esta expresión a ambos lados de la identidad del paso inductivo como sigue:

   $$1+3+5+7+\cdots+(2k-1)+\underbrace{2k+1}=k^2+\underbrace{2k+1}.$$

   El lado derecho es un trinomio cuadrado perfecto, por lo que concluimos lo siguiente:

   $$1+3+5+7+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2.$$

   Es decir, la propiedad para $k+1$, por ende, el principio de inducción matemática nos dice que la propiedad es válida para todo entero positivo.

2. Utilizando inducción matemática, verificaremos la fórmula que sigue:

   $$S=\sum_{j=1}^{n} j^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

   Probemos primero el caso base, es decir, verifiquemos que se cumple para $n=1$. En efecto, lo hace:

   $$S=1^2=\frac{1(2)(3)}{6}=\frac{(1)(1+1)(2(1)+1)}{6}.$$

   Por tanto, la fórmula es válida para $n=1$.

Luego consideremos que es válida para $n = k$, esto es, empleando la hipótesis de inducción nos resulta:

$$S = \sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{k\,(k+1)\,(2k+1)}{6}.$$

Analicemos entonces qué pasa para $S = \sum\limits_{j=1}^{k+1} j^2$, es decir:

$$\begin{aligned} S = \sum_{j=1}^{k+1} j^2 &= (k+1)^2 + \sum_{j=1}^{k} j^2 = (k+1)^2 + \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\ &= (k+1)\left[(k+1) + \frac{k(2k+1)}{6}\right] = (k+1)\left[\frac{6(k+1)+k(2k+1)}{6}\right] \\ &= (k+1)\left[\frac{(6k+6)+(2k^2+k)}{6}\right] = (k+1)\left[\frac{2k^2+7k+6}{6}\right]. \end{aligned}$$

En lo anterior, la segunda igualdad la obtuvimos utilizando la hipótesis de inducción. Ahora, utilizando la propiedad distributiva podemos verificar que

$$2k^2 + 7k + 6 = (k+2)(2k+3).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} S = \sum_{j=1}^{k+1} j^2 &= \frac{(k+1)\,(k+2)(2k+3)}{6} \\ &= \frac{(k+1)\,((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

Es decir, la fórmula se cumple para $n = k + 1$. Así, dado que se cumplen los dos pasos de la prueba por inducción, verificamos que la fórmula para la suma de los primeros n cuadrados consecutivos es cierta.

3. Usando propiedades de divisibilidad trabajadas previamente, probemos que para todo número impar positivo m, el número $m^2 - 1$ es divisible entre 8.

   En este caso queremos ver que la propiedad es válida para todo entero positivo impar, pero recordemos que los números impares se pueden expresar de la forma $m = 2n - 1$, por lo que la inducción la haremos para n que toma como valores todos los enteros positivos.

   Nuevamente, comencemos probando la base de la inducción, es decir, comprobemos que la propiedad es válida para $n = 1$, en cuyo caso tendremos $m = 2(1) - 1 = 1$, con lo cual concluimos que 8 divide a $m^2 - 1 = 0$.

Para el paso inductivo supongamos que la propiedad es válida para $n = k$, es decir, $m = 2k - 1$ y 8 divide a $(2k - 1)^2 - 1$. Ahora, para $n = k + 1$ tenemos que $m = 2(k + 1) - 1 = 2k + 1$ es el siguiente impar. Por consiguiente, la expresión que analizaremos es $(2k+1)^2 - 1$, una diferencia de cuadrados que desarrollamos a continuación:

$$(2k + 1)^2 - 1 = (2k + 1 - 1)(2k + 1 + 1) = (2k)(2k + 2) = 4k(k + 1).$$

Finalmente, notemos que la última expresión tiene a 4 como factor y los otros dos factores son enteros consecutivos, por lo que uno de ellos es par, así la expresión $4k(k + 1)$ es divisible entre 8.

Se debe tener cuidado al aplicar el método de inducción matemática, ninguno de sus pasos debe quedar sin justificar, de lo contrario la validación de la afirmación puede ser incorrecta.

¿Qué pasa cuando no verificamos la base de inducción?

Si omitiéramos la base de inducción demostraríamos de manera incorrecta la veracidad de afirmaciones como "todo entero positivo es igual a él mismo más uno", lo cual, de hecho, es falso. La prueba errónea se efecturía así: en el paso inductivo supondríamos que la propiedad es válida para $n = k$, es decir, que $k = k + 1$. Al probarlo para $n + 1$ observaríamos que $n + 1 = k + 1$, y por hipótesis de inducción:

$$k + 1 = (k + 1) + 1 = k + 2 = n + 2.$$

De esta forma, concluiríamos que $n + 1 = n + 2$, por lo tanto, quedaría demostrado el paso inductivo.

¿Qué pasa cuando no verificamos el paso inductivo?

Notemos que pese a ser válida una proposición para muchos valores, no es suficiente para afirmar que vale para todos los enteros positivos. Por ejemplo: si queremos demostrar la validez de la afirmación "para todo entero positivo n, la expresión $n^2 - n + 41$ nos da un número primo", no basta que sea cierta para los primeros cuarenta enteros positivos, pues de hecho el primer entero positivo para el cual no es válida es $n = 41$, en cuyo caso no obtenemos un número primo, ya que $n^2 - n + 41 = (41)^2 - 41 + 41 = 41^2$.

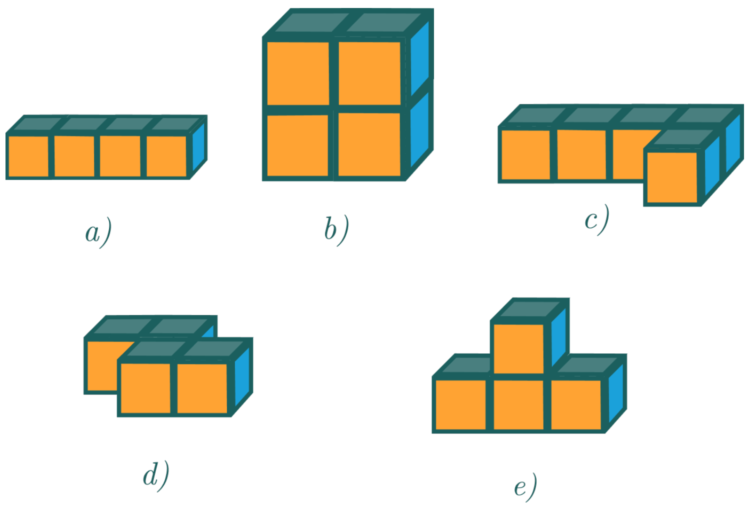
5.2. Preguntas de lógica, nivel 1

Los problemas que se presentan a continuación formaron parte de los exámenes eliminatorios de la OMMEB en Veracruz. Para poder identificarlos se les ha asignado una notación como la siguiente: **5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P3**; lo anterior significa que dicho ejercicio corresponde a la 5.^{a} OMMEB de Veracruz, del Nivel 1, del Examen selectivo 2, Problema 3. En el caso de los problemas correspondientes a la 2.^{a} OMMEB se omite el número de examen y el nivel, puesto que se utilizó solo un examen selectivo para todos los niveles.

El nivel 1 en la OMMEB refiere a cuarto y quinto grados de primaria.

5. 2. 1. Preguntas de opción múltiple

Problema 5.1. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E1, P1). Cada una de las siguientes piezas se formó al pegar cuatro cubos del mismo tamaño. Si su superficie debe pintarse, ¿cuál de ellas usará menos pintura?



Problema 5.2. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E1, P4). Cada día Amanda, Beatriz y Camilo salen a pasear. Se sabe que cuando Amanda no lleva puesto un sombrero, Beatriz sí lo lleva puesto, y cuando Beatriz no lo lleva puesto, Camilo sí lo lleva. Hoy Beatriz no lleva puesto un sombrero, ¿quién sí lo lleva?

(a) Amanda y Camilo

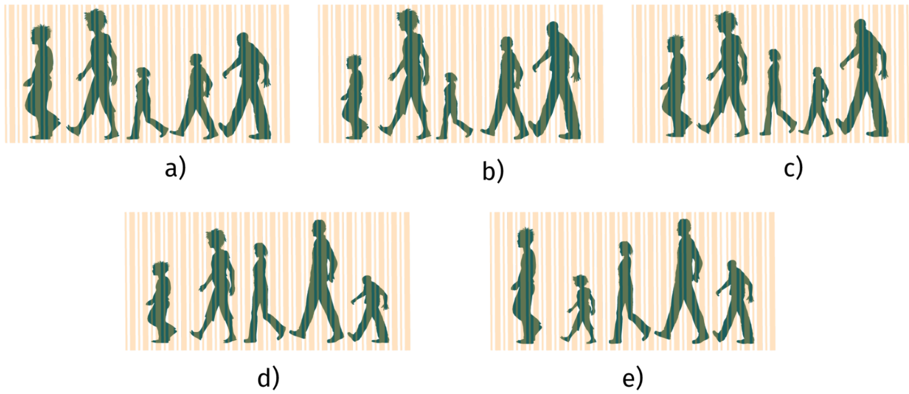
(b) Solo Amanda

(c) Solo Camilo

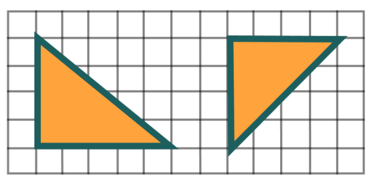
(d) Ni Amanda ni Camilo

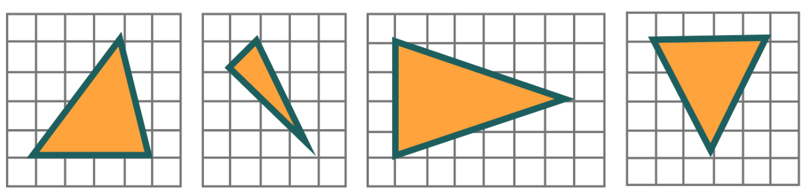
(e) No se puede saber

Problema 5.3. (3.^{a} OMMEB-Ver., N1, E1, P7). Detrás de una cortina se formaron de manera ordenada Armando, Beto, Carlos, Diego y Enrique en una fila. Armando mide más que Diego y Enrique; el más alto es Beto y el más bajo Carlos; Enrique es más alto que Diego. ¿Cuál figura muestra la forma correcta en que se ven sus siluetas?



Problema 5.4. (5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E3, P1). Iliana dibujó tres triángulos en una hoja de un cuaderno cuadriculado. Dos de ellos tienen exactamente la misma área; dos son específicamente isósceles y tambien dos son triángulos rectángulos. En la imagen siguiente se muestran dos de los triángulos que dibujó, ¿cuál es el tercero?

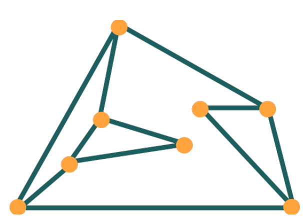




(a) (b) (c) (d)

5. 2. 2. Preguntas abiertas

Problema 5.5. (2.^{a} OMMEB-Ver., P2). En la figura que sigue se muestran varios focos conectados entre sí. Al inicio todos los focos están apagados. Cuando Javier toca uno, ese foco y los de sus vecinos se encienden. ¿Cuál es la menor cantidad de focos que puede tocar Javier para encenderlos todos?



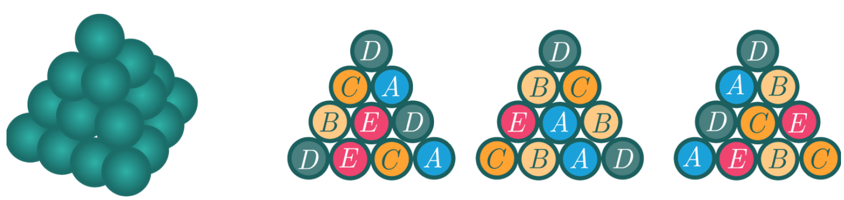
Problema 5.6. (2.^{a} OMMEB-Ver., P10). Un león se esconde en una de tres habitaciones. Una nota en la puerta de la habitación 1 dice: “El león está aquí”; otra nota en la puerta de la habitación 2 dice: “El león no está aquí”, y una más en la puerta de la habitación 3 dice: “$2 + 2 = 2 \times 3$”. Sabiendo que solamente la afirmación de una de estas notas es verdadera, ¿en qué habitación está el león?

Problema 5.7. (5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E1, P4). La mamá de Belén puso en una caja 60 caramelos de fresa, 30 de vainilla y 45 de chocolate. La abertura de la caja es muy pequeña, por eso Belén solo puede sacar un dulce al meter su mano en ella, sin ver cuál sabor toma. Como Belén desea probar todos los sabores, sacará de uno en uno tantos caramelos como sean necesarios para probar los tres sabores. ¿Cuál es el mínimo número de caramelos que Belén deberá sacar de la caja, independientemente del orden en que los saque?

Problema 5.8. (5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E2, P6). En un torneo de futbol participaron seis equipos: A, B, C, D, E y F. Cada equipo se enfrentó una vez contra cada uno de los otros. El torneo se organizó en cinco rondas de manera que en cada ronda se jugaron tres partidos simultáneamente. Si en cada ronda se transmitió uno de los tres partidos señalados en la tabla siguiente (por ejemplo, en la primera ronda el partido transmitido fue el de A contra B), ¿en qué ronda se enfrentaron D y F?

1	2	3	4	5
$A - B$	$C - D$	$A - E$	$E - F$	$A - C$

Problema 5.9. (5.^{a} OMMEB-Ver., N1, E3, P3). Una pirámide triangular se construyó con veinte esferas. Cada una de ellas está etiquetada con A, B, C, D o E, de forma que hay cuatro esferas con etiquetas de cada tipo. Las siguientes imágenes muestran las etiquetas de las esferas que conforman cada una de las tres caras laterales de la pirámide. ¿Cuál es la etiqueta de la esfera oculta en la base de la pirámide?



5.3. Preguntas de lógica, nivel 2

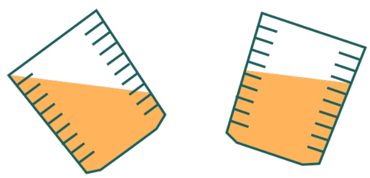
Los problemas que se presentan a continuación formaron parte de los exámenes eliminatorios de la OMMEB en Veracruz. Para poder identificarlos se les ha asignado una notación como la siguiente: **5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E2, P3**; lo anterior significa que dicho ejercicio corresponde a la 5.^{a} OMMEB de Veracruz, del Nivel 2, del Examen selectivo 2, Problema 3.

El nivel 2 en la OMMEB refiere a sexto grado de primaria y primer año de secundaria.

5. 3. 1. Preguntas de opción múltiple

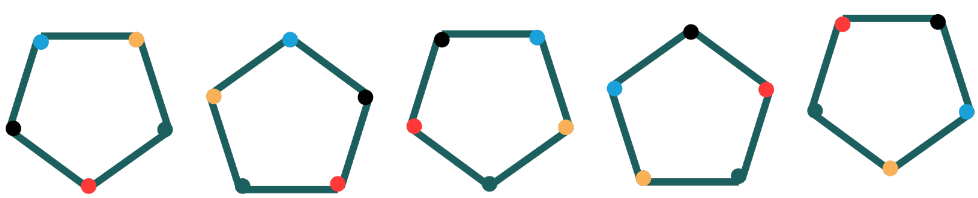
Problema 5.10. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E1, P4). Como se muestra enseguida, se ha puesto líquido en cinco recipientes de vidrio idénticos. Si cuatro de ellos tienen la misma cantidad de líquido, ¿cuál posee distinta cantidad?

(a) *(b)* *(c)*



(d) *(e)*

Problema 5.11. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E2, P1). Una sucesión de pentágonos comienza con un pentágono regular cuya posición inicial va transformándose como se indica en la siguiente figura. ¿Qué color tendrá el vértice que quede hacia abajo en el pentágono número 2019?



Pentágono 1 *Pentágono 2* *Pentágono 3* *Pentágono 4* *Pentágono 5*

(a) Rojo

(b) Verde

(c) Amarillo

(d) Azul

(e) Negro

Problema 5.12. (5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E2, P2). Iván es 5 cm más alto que Carmen, pero 10 cm más bajo que Fernando. Además, Mariana es 10 cm más alta que Fernando, aunque 5 cm más baja que Elena. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?

(a) Carmen y Elena tienen la misma altura.

(b) Carmen es $10\ \mathrm{cm}$ más alta que Elena.

(c) Carmen es $10\ \mathrm{cm}$ más baja que Elena.

(d) Carmen es $30\ \mathrm{cm}$ más alta que Elena.

(e) Carmen es $30\ \mathrm{cm}$ más baja que Elena.

Problema 5.13. (5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E3, P2). Se tienen 2021 fichas numeradas del 1 al 2021, mismas que se han ordenado en una fila de acuerdo con su número. Algunas fichas son rojas, otras verdes y el resto azules. Se sabe que si tres fichas tienen números consecutivos, entonces son una de cada color. Leonardo apuntó lo siguiente sobre el color de cinco fichas con diferentes números:

- La ficha 2 es verde.
- La ficha 20 es azul.
- La ficha 202 es roja.
- La ficha 1002 es azul.
- La ficha 2021 es verde.

Sin embargo, Leonardo se dio cuenta después que se equivocó al anotar el color de una de las fichas. ¿Cuál es el número de la ficha en la que se equivocó?

(a) 2

(b) 20

(c) 202

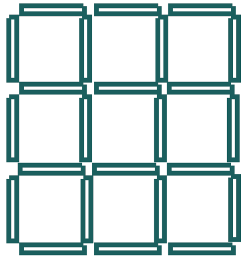
(d) 1002

(e) 2021

5. 3. 2. Preguntas abiertas

Problema 5.14. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E1, P6). En el jardín de una bruja hay 30 animales: perros, gatos y ratones. La bruja convierte a seis de los perros en gatos y a cinco de los gatos en ratones. Si después de esto hay el mismo número de perros, gatos y ratones, ¿cuántos gatos había al principio?

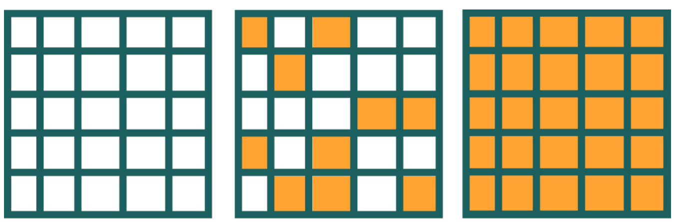
Problema 5.15. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E1, P8). Natalia tiene varios palitos de longitud 1. Algunos son amarillos, otros rojos, otros blancos y otros verdes. Quiere construir una figura de 3×3 como la que se muestra enseguida, de manera que cada cuadrito de lado 1 tenga exactamente un palito de cada color. ¿Cuál es el mínimo número de palitos verdes que debe usar?



Problema 5.16. (4.^{a} OMMEB-Ver., N2, E1, P8). De su casa a la escuela Toño camina por una cuadra con cuatro casas pintadas de diferente color. Él pasa enfrente de la casa naranja antes que de la roja y la azul antes que de la amarilla. Si la casa azul no está junto junto a la amarilla, ¿de cuántas formas pueden estar ordenadas estas cuatro casas?

Problema 5.17. (3.^{a} OMMEB-Ver., N2, E4, P2). Diego tiene clases de piano todos los lunes y jueves; mientras Ana un lunes sí y otro no. Ambos empezaron a tomar clases un mismo lunes, pero Diego ha asistido a 15 clases más que Ana. ¿Desde hace cuántas semanas Diego empezó sus clases?

Problema 5.18. (5.^{a} OMMEB-Ver., N2, E4, P4). Cada cuadrito de una cuadrícula de 5×5 se puede pintar de blanco o naranja generando un patrón distinto cada vez. Los siguientes patrones son solo algunos de los muchos que se pueden producir:



Si afirmamos que un patrón tiene una simetría rotacional de 90° cuando se ve igual al girarse 90° sobre el cuadrito del centro, ¿cuántos patrones con la cuadrícula mencionada, de todos los que se pueden generar, tendrán simetría rotacional de 90°?

5.4. Preguntas de lógica, nivel 3

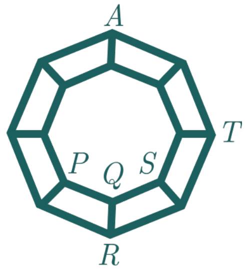
Los problemas que se presentan a continuación formaron parte de los exámenes eliminatorios de la OMMEB en Veracruz. Para poder identificarlos se les ha asignado una notación como la siguiente: **5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E2, P3**; lo anterior significa que dicho ejercicio corresponde a la 5.^{a} OMMEB de Veracruz, del Nivel 3, del Examen selectivo 2, Problema 3.

El nivel 3 en la OMMEB refiere al segundo año de secundaria.

5. 4. 1. Preguntas de opción múltiple

Problema 5.19. (3.^{a} OMMEB-Ver., N3, E1, P3). La figura que sigue consta de dieciséis vértices, algunos de los cuales están conectados entre sí por segmentos. Sobre las

líneas de la figura se traza un camino que usa 2019 segmentos y que empieza en el vértice A. ¿En cuál de los vértices P, Q, R, S o T puede terminar el camino?
Observación. El camino puede repetir vértices y segmentos.



(a) Solo en P, R o S

(b) Solo en P, R, S o T

(c) Solo en Q

(d) Solo en T

(e) En cualesquiera es posible

Problema 5.20. (4.^{a} OMMEB-Ver., N3, E2, P1). Un cubo de madera se forma colocando 27 cubitos en 3 capas de 9 cubitos cada una. Como a cada uno de sus cubitos se le asigna un número que va desde 1 hasta n, de tal forma que cualesquiera 2 cubitos con un vértice común deben tener números distintos, ¿cuál es el menor valor de n, de tal forma que podamos formar el cubo grande con dichas condiciones?

(a) 6

(b) 8

(c) 9

(d) 18

(e) 27

Problema 5.21. (5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E3, P1). Una caja está llena de peras y manzanas. Su cantidad de manzanas es el doble que su cantidad de peras. Luego María y José se repartieron todas las frutas que contenía, de forma que a María le tocó el doble de frutas que a José. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(a) María tomó el doble de manzanas que de peras.

(b) María tomó el doble de manzanas que José.

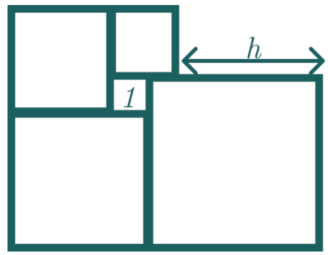
(c) María tomó la misma cantidad de manzanas que José tomó de peras.

(d) María tomó la misma cantidad de peras que José tomó de manzanas.

(e) Ninguna es necesariamente cierta.

5. 4. 2. Preguntas abiertas

Problema 5.22. (5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E2, P3). En la figura siguiente hay 5 cuadrados. Si el cuadrado más pequeño tiene área 1, ¿cuál es el valor de h?



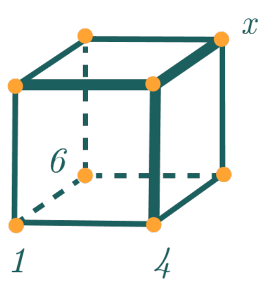
Problema 5.23. (5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E2, P4). En una isla existen 20 personas que siempre dicen la verdad y 2000 que siempre dicen mentiras. Una hechicera forma 1010 parejas y le pregunta a cada persona si su pareja es mentirosa o no. En total, en 20 ocasiones se dijo que la pareja era mentirosa. ¿En cuántas parejas ambas personas son mentirosas?

Problema 5.24. (3.^{a} OMMEB-Ver., N3, E3, P5). En un bosque encantado viven dos especies de pájaros que hablan: loros que siempre dicen la verdad y cuervos que siempre mienten. Se sabe que cuatro de estos pájaros viviendo juntos en dicho bosque se llaman Paco, Pedro, Pepe y Ulises, quienes en cierta ocasión hicieron las siguientes afirmaciones:

- Paco: "Ulises y yo somos de diferente especie".
- Pedro: "Pepe es un cuervo".
- Pepe: "Pedro es un cuervo".
- Ulises: "De nosotros cuatro, hay al menos dos loros".

¿Cuántos de estos cuatro pájaros son cuervos?

Problema 5.25. (3.^{a} OMMEB-Ver., N3, E4, P5). Los vértices de un cubo se numeran del 1 al 8, de manera que al sumar los cuatro números de cada cara el resultado sea el mismo para todas las caras. Ya se han colocado los números 1, 4 y 6 como se muestra en la figura. ¿Qué número va en el vértice marcado con x?



Problema 5.26. (5.^{a} OMMEB-Ver., N3, E4, P1). Sea S un conjunto de 6 enteros tomados del conjunto $\{1, 2, \ldots, 12\}$ cuya propiedad es que si a y b son elementos de S con $a < b$, entonces b no es un múltiplo de a. ¿Cuál es el número más pequeño que puede estar en el conjunto S?

5.5. Soluciones a los problemas de lógica

5. 5. 1. Nivel 1

Solución del problema 5.1. La respuesta es (b).

Como todas las piezas están formadas por cubitos y sus caras se encuentran pegadas entre sí, es más fácil revisar cuántas caras no deben pintarse. Así, en (b) hay cuatro pares de caras de este tipo, mientras en todas las demás opciones solo tres.

Solución del problema 5.2. La respuesta es (a).

Como Beatriz no lleva sombrero, entonces Camilo sí lleva. Si Amanda no llevara, Beatriz sí llevaría. Pero Beatriz no lleva, así que Amanda sí lleva sombrero.

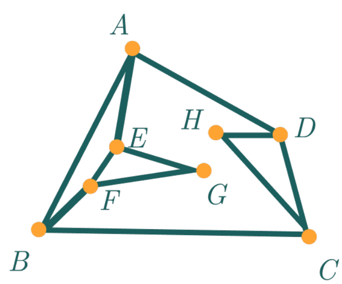
Solución del problema 5.3. La respuesta es (a).

La opción (a) cumple todas las condiciones, mientras que en las otras Armando mide menos que Diego o Enrique.

Solución del problema 5.4. La respuesta es (d).

Como los dos triángulos mostrados son rectángulos con áreas de $5 \cdot 4/2 = 10$ y $4 \cdot 4/2 = 8$, mientras solo uno es isósceles, entonces el triángulo que buscamos debe ser isósceles, no rectángulo, pero sí de área 8 o 10. Por eso la respuesta es el inciso (d) porque el triángulo es isósceles, con área de $4 \cdot 4/2 = 8$ y no rectángulo, en cambio, el triángulo del inciso (a) no es isósceles, el del inciso (b) es rectángulo y el del (c) tiene área de $\frac{4 \cdot 6}{2} = 12$.

Solución del problema 5.5. Etiquetemos los focos como se muestra en la figura. Los focos G y H tienen solamente dos vecinos, por lo tanto, es necesario tocar un foco por cada uno de los triángulos donde ellos se encuentran. Entonces se tiene que tocar dos focos o más.



Por otro lado, bastan 2 focos porque tocando E se encienden A, F y G, en tanto tocando C se encienden B, D, G y H.

Solución del problema 5.6. Si la afirmación de la puerta de la habitación 1 es verdadera, también lo es la de la 2, lo cual no es posible. Luego el león no está tras la puerta de la habitación 1. Como sabemos que la afirmación de la habitación 3 es falsa, la de la 2 debe ser verdadera. De allí deducimos que el león no está tras la puerta de la habitación 2. Así, la única posibilidad es que el león esté tras la puerta de la habitación 3.

Solución del problema 5.7. La respuesta es 106.

Procedamos por contradicción suponiendo que 106 no es el mínimo. Si el mínimo fuese 105, entonces tendríamos que, en el peor de los casos, Belén habría sacado los 60 caramelos de fresa y los 45 de chocolate, por lo que le haría falta sacar al menos otro caramelo para obtener el de sabor vainilla. Por lo tanto, 106 es el mínimo de caramelos que Belén debe sacar.

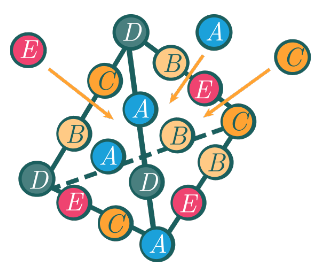
Solución del problema 5.8. La respuesta es en la ronda 1.

Debemos completar la tabla cuidando que un equipo no juegue dos veces en una misma ronda. Iniciamos así con los partidos faltantes de A que son $A-D$ y $A-F$, los cuales solamente pueden anotarse en las rondas 4 y 2, respectivamente. Luego, en la ronda 2 el partido faltante debe ser $B-E$ y en la ronda 4 el partido $B-C$. Los partidos faltantes de E en ese momento son $C-E$ y $D-E$, que únicamente pueden producirse en las rondas 1 y 5, respectivamente. Por ende, en la ronda 1 hace falta anotar el partido $D-F$ y en la ronda 5 el partido $B-F$. Una vez completamos todas las rondas de la tabla, como se muestra en la figura, podemos decir que D y F se enfrentaron en la ronda 1.

1	2	3	4	5
$A-B$	$C-D$	$A-E$	$E-F$	$A-C$
$C-E$	$A-F$	$B-D$	$A-D$	$D-E$
$D-F$	$B-E$	$C-F$	$B-C$	$B-F$

Solución del problema 5.9. La respuesta es D.

Observemos que las esferas ubicadas en las aristas de la pirámide aparecen en dos caras que podemos pegar en el siguiente esquema:



Notemos entonces que A, C y E aparecen 4 veces (3 en las aristas y una en el centro) y B aparece en 4 aristas. Sin embargo, D solo aparece en 3 aristas, así que esa es la respuesta.

5. 5. 2. Nivel 2

Solución del problema 5.10. La respuesta es (b).

Notemos que en todos los casos la vista frontal del líquido es un trapecio con altura igual al ancho del recipiente. Entonces, la diferencia en la cantidad de líquido está dada por la suma de las longitudes de los dos lados paralelos del trapecio. Así, en (a) tal suma es $6+6=12$; en (b) $9+4=13$; en (c) es $4+8=12$; en (d) $10+2=12$ y en (e) es $5+7=12$.

Solución del problema 5.11. La respuesta es (e).

Asignemos a cada uno de los vértices una letra de la siguiente forma: al vértice rojo la letra A, al verde la letra B, al amarillo la letra C, al azul la letra D y, por último, al vértice negro la letra E. Notemos que en la figura 1 el vértice rojo queda abajo; en la figura 2 el vértice azul queda arriba; en la figura 3 el vértice verde queda abajo y en la 4 el vértice negro queda arriba. Luego, al rotar la figura podemos obtener el siguiente patrón:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ A & D & B & E & C & A & D & B & E & C & A \\ \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow \end{array}$$

Las flechas indican si el vértice queda arriba o abajo. Por tanto, obtenemos que cada bloque de 10 rotaciones se repite el patrón, así en el movimiento 2019 la figura quedará como en el movimiento 9 con la letra E, es decir, con su vértice de color negro abajo.

Solución del problema 5.12. La respuesta es (e).

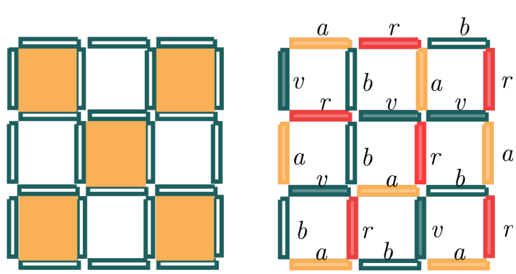
Tenemos que el orden de estaturas, de la persona más baja a la más alta, es Carmen, Iván, Fernando, Mariana y Elena. La diferencia de estaturas entre Carmen y Elena es de $5 + 10 + 10 + 5 = 30$ cm.

Solución del problema 5.13. La respuesta es (b).

Notemos que cada tres fichas debe repetirse el color. En particular la ficha 4 debe tener el mismo color que la 1, pues ambas llevan un color distinto que las fichas 2 y 3. También nos dice que dos fichas llevan el mismo color si, y solo si, sus números tienen el mismo residuo al dividirlos entre 3. Así las fichas con los números 2, 20 y 2021 deberían ser del mismo color (pues tienen residuo 2 al dividirlos entre 3). Como solamente una anotación es incorrecta, concluimos que es la ficha con el número 20.

Solución del problema 5.14. Como el número total de animales es 30 y al final hay el mismo número de cada tipo, entonces hay 10 gatos. Por otro lado, sabemos que el número de gatos primero incrementa en 6 y, luego, se reduce en 5, de manera que al final queda solo uno más que al principio, es decir, 9 era el número de gatos al principio.

Solución del problema 5.15. Observemos que los cuadros sombreados en la figura de la izquierda son cinco y no comparten ningún lado, por lo tanto se necesitan al menos cinco palitos verdes. En la figura de la derecha se muestra un acomodo de estos palitos que cumple las condiciones del problema, así que el mínimo es, efectivamente, cinco.



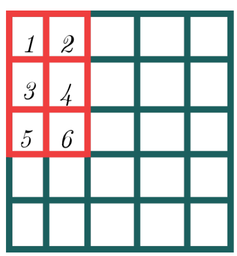
Solución del problema 5.16. Notemos que la casa amarilla solo puede estar en dos posiciones: la tercera posición o la última. Entonces, si la casa amarilla ocupa la tercera posición, la casa azul debe ser la primera, pues la casa amarilla y azul no están juntas. Luego, solo puede haber un arreglo posible: azul-naranja-amarilla-roja. Si la casa amarilla es la última, solo tenemos dos arreglos posibles de las casas: azul-naranja-roja-amarilla y naranja-azul-roja-amarilla. Por lo tanto existen 3 arreglos posibles.

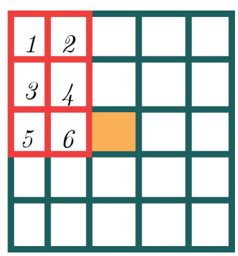
Otra solución. La cantidad total de acomodos posibles de las cuatro casas es $4! = 24$. Por otro lado, los acomodos donde la casa amarilla y azul están juntas es $3! \cdot 2 = 12$, considerando los arreglos de naranja, azul-roja y amarilla, por lo que existen $24 - 12 = 12$ arreglos, donde azul y amarillo no son adyacentes. La mitad de estos arreglos tienen la casa naranja por simetría y exactamente la mitad tambien la casa azul antes que la amarilla, por lo tanto, la cantidad que buscamos es $12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 3$ arreglos.

Solución del problema 5.17. La respuesta es 10 semanas.

Notemos que cada 2 semanas Diego tiene tres clases más que Ana, así que han pasado 10 semanas desde que empezó sus clases.

Solución del problema 5.18. Primero dividamos el tablero de 5×5 como se ve en las siguientes imágenes. Luego repitamos cualquier patrón de blanco y naranja que pongamos en la primer imagen para tener la simetría rotacional. Como cada uno de los seis cuadrados pueden ser anaranjados o blancos, tenemos $2^6 = 64$ posibles patrones con un cuadro blanco en el centro, así como también $2^6 = 64$ patrones con un cuadro naranja en el centro. Por lo tanto, $64 + 64 = 128$ patrones distintos cumplen con la simetría que menciona el problema.





5. 5. 3. Nivel 3

Solución del problema 5.19. La respuesta es (c).

Pintemos los vértices de la figura en cuestión con dos colores, de forma tal que los extremos de cada segmento tengan distinto color. Notemos enseguida que todo camino alterna colores, y como 2019 es impar y el camino inicia en A, entonces solo puede terminar en un vértice con distinto color que A, así que la única posibilidad es Q. Existen muchas posibilidades de confirmar que sí es posible llegar en 2019 pasos, una de ellas es ir directamente de A a Q en cinco pasos y después moverse de Q a S alternadamente hasta completar los 2019 movimientos.

Solución del problema 5.20. La respuesta es (b).

Necesitamos al menos los números del 1 al 8, ya que en un cubo de $2 \times 2 \times 2$ cubitos que comparten un vértice común (el del centro) deben tener, por lo tanto, 8 números distintos. Observemos que también es posible construir un cubo de $3 \times 3 \times 3$ con 8 números asignados a los cubitos.

1	2	3
3	4	5
5	6	7

Capa superior

5	6	7
7	8	1
1	2	3

Capa intermedia

1	2	3
3	4	5
5	6	7

Capa inferior

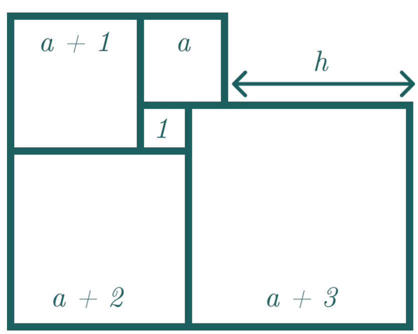
Con esta configuración advertimos que se cumplen las condiciones dadas.

Solución del problema 5.21. La respuesta es (d).

Si María se quedara con todas las manzanas y José con todas las peras, entonces la condición verdadera sería que ella tomó la misma cantidad de peras que él de manzanas, es decir, 0 en cada caso. Suponiendo que José tiene $x > 0$ manzanas, veríamos que María tiene también x peras. Es claro que María debe tener al menos una pera, de lo contrario no sería cierto que ella posee el doble de frutas que él. Luego, hagamos que María le dé una pera a José y José una manzana a María. De esta manera se sigue cumpliendo que ella tiene el doble de frutas que José, al tiempo que posee la misma cantidad de peras que él tiene de manzanas. Esto se puede repetir mientras José tenga manzanas. Cuando él termine de darle a María todas las manzanas y ella se las intercambie por peras, entonces María ya tendrá todas las manzanas, que son el doble de las peras, y José ya deberá tener todas las peras. De esta manera, notemos que en un principio María tenía la misma cantidad de peras que José de manzanas.

Solución del problema 5.22. La respuesta es $h = 4$.

Llamemos a al lado del cuadrado que está encima del más pequeño, de modo que los lados de los otros cuadrados sean $a+1$, $a+2$ y $a+3$, según se indica en la figura. Notemos enseguida que su longitud horizontal se puede calcular como $(a+1)+a+h$, pero también como $(a+2)+(a+3)$. Al igualarlas tenemos que $h = (a+2+a+3) - (a+1+a) = 4$.



Solución del problema 5.23. La respuesta es 995.

En cada pareja se puede tener que las dos personas mienten, las dos dicen la verdad o una de cada tipo. Ahora bien, la única forma de escuchar decir que alguien es mentiroso es cuando la pareja está conformada por una persona que miente y otra que dice la verdad, en tal caso ambas personas dirán que el otro es mentiroso. Como se llamó mentirosas a 20 personas, tenemos que había 10 parejas con una persona diciendo mentiras y otra diciendo la verdad. Así, las 1990 personas mentirosas sin formar parte de esas parejas deben estar agrupadas entre ellas, dando un total de 995 parejas con ambos siendo mentirosos.

Solución del problema 5.24. De las afirmaciones de Pedro y Pepe tenemos que no pueden ser ambos cuervos ni ambos loros, así que uno de ellos debe ser loro y el otro cuervo. Si Paco es un loro, entonces Ulises es un cuervo, por lo que Ulises dice mentiras y no existen al menos dos loros, lo cual es una contradicción. Entonces, Paco es un cuervo y, por lo tanto, Ulises también. En conclusión, hay tres cuervos.

Solución del problema 5.25. La respuesta es 2.

Como tenemos la igualdad $1+2+\cdots+8=36$ y cada vértice lo comparten tres caras, el total de los números en cara es $\frac{36\times 3}{6}=18$. Luego, el dígito faltante en la base es $18-1-4-6=7$. Veamos que en la cara donde están el 4 y 7 falta una suma de 7, que solo puede conseguirse con 2 y 5. De forma análoga, en la cara con 1 y 6 le faltan los números 8 y 3, mientras que a la cara con 6 y 7 le faltan el 2 y 3. De lo anterior, tenemos que en el lugar de x va el 2.

Solución del problema 5.26. Observemos lo siguiente:

- Si el menor elemento es 1, entonces no podemos tomar más elementos, por lo que no es candidato.
- Si el menor elemento es 2, podemos escoger como los otros elementos los números impares del 3 al 12. Sin embargo, 3 y 9 no pueden estar, ya que $3<9$ y 9 es múltiplo de 3. Por lo que 2 no puede ser el elemento menor.
- Si el menor elemento es 3, entonces solo podemos tomar 4, 5, 7, 8, 10 y 11 como los otros elementos, pero recordando la regla del problema, no podemos tener juntos al 4 y 8, así como tampoco al 5 y 10.

Considerando lo anterior, y que el conjunto $\{4,5,6,7,9,11\}$ sí funciona, concluimos que el elemento más pequeño posible para S es 4.

Bibliografía

Aguilar Arteaga, V. A., González García, I., y Torres Hernández, R. (2015). *Una introducción a la heurística matemática.* Universidad Autónoma de Querétaro.

Aguilar Márquez, A., Bravo Vázquez, F. V., Gallegos Ruiz, H. A., Cerón Villegas, M., y Reyes Figueroa, R. (2009). *Matemáticas simplificadas* (2.ª ed.). Pearson Educación.

Bulajich Manfrino, R., y Gómez Ortega, J. A. (2002). *Geometría.* Instituto de Matemáticas, UNAM.

Gómez Ortega, J. A., Rivera Bobadilla, O., y Villanueva Méndez, H. (2019). *Problemas de geometría para olimpiadas de secundaria.* Instituto de Matemáticas, UNAM.

Illanes, A. (2017). *Principios de olimpiada.* Instituto de Matemáticas, UNAM.

Lehmann, C. H. (2004). *Álgebra.* Limusa.

Mayorga Cruz, D., Díaz García, A.K., y González Hernández, N. I. (2019). *Ciencia sin fronteras III.* Secretaría de Educación de Veracruz.

Neve Jiménez, C., y Rosales Ortiz, L. (2017). *Por la senda de los círculos.* Universidad Nacional Autónoma de México.

Niven, I., y Zukerman, H. S. (1976). *Introducción a la teoría de los números.* Limusa.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2022). *Programme for international student assessment.* OECD

Pérez Seguí, M. L. (2005). *Combinatoria* (3.ª ed.). Instituto de Matemáticas, UNAM.

Pogorélov, A. V. (1998). *Geometría elemental.* Instituto Politécnico Nacional.

Rosales Ávalos, M., Barrientos Flores, J., Issa González, E., López Castro, M. T., Tovilla Martínez, M. del C., y Velázquez Durán, L. (2019). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Cuarto grado.* (3.ª ed.). SEP.

Rosales Ávalos, M., Barrientos Flores, J., Issa González, E., López Castro, M. T., Tovilla Martínez, M. del C., y Velázquez Durán, L. (2019). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Tercer grado.* (3.ª ed.). SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2022). *Plan de estudio para la educación preescolar, primaria y secundaria 2022.* SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica. Primaria. Primer grado.* SEP.

Silva Ochoa, J. M., y Lazo de Sánchez, A. (2008). *Fundamentos de matemáticas: álgebra, trigonometría, geometría analítica y cálculo* (7.ª ed.). Limusa.

Soifer, A. (2009). *Mathematics as problem solving.* Springer.

Vilenkin, N. (1972). *¿De cuántas formas?* Mir.

Wentworth, J., y Smith, D. E. (2000). *Geometría plana y del espacio.* Porrúa.

Zubieta Russi, G. (2002). *Lógica deductiva.* Sociedad Matemática Mexicana.

Problemas básicos de razonamiento matemático fue publicado el 21 de septiembre de 2023, siendo Gobernador del Estado Cuitláhuac García Jiménez y Secretario de Educación Zenyazen R. Escobar García.

VERACRUZ
GOBIERNO
DEL ESTADO

SEV
Secretaría
de Educación

SEB
Subsecretaría de
Educación Básica

CIVE
Consejo Interinstitucional
Veracruzano de Educación

Matemáticas para todos

Universidad Veracruzana