# Principios Básicos de Conteo

Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Guanajuato

## 1 Introducción

En matemáticas, contar cosas es un concepto fundamental. No obstante, no siempre es simple. El área de las matemáticas que se ocupa de resolver problemas que consisten en contar un cierto número de objetos se llama combinatoria. En olimpiada, encontramos muchos problemas de este estilo, por ejemplo:

*¿De cuántas maneras podemos ir de una ciudad $A$ a una ciudad $C$, pasando por la ciudad $B$ si hay tres caminos de $A$ a $B$ y cuatro caminos de $B$ a $C$?*

El problema anterior es simple. La respuesta es de doce maneras: Una vez elegido el camino para llegar a $B$ desde $A$, nos quedan cuatro opciones para llegar a $C$. Es decir tenemos cuatro maneras de llegar a $C$ para cada uno de los tres caminos de $A$ a $B$. El número total de formas es por tanto $3 \times 4 = 12$. Este problema nos permite ilustrar una idea muy sencilla que enunciamos a continuación:

**Principio Multiplicativo** El número de maneras de elegir un objeto de un conjunto $X$ de objetos, y a continuación otro objeto perteneciente a otro conjunto $Y$ debemos multiplicar el número de objetos en $X$ por el número de objetos de $Y$

En el problema anterior, el conjunto $X$ era el de los caminos de $A$ a $B$ y el conjunto $Y$ el de los caminos de $B$ a $C$. No obstante, a veces el principio anterior no es suficiente para resolver un problema. Consideremos el siguiente:

*¿De cuántas maneras podemos ir de una ciudad $A$ a una ciudad $C$ si hay tres caminos de $A$ a $B$ y cuatro caminos de $B$ a $C$ y además hay cinco caminos directos entre $A$ y $C$?*

La solución no obstante, es aún muy simple. Sabemos que hay 12 formas de ir de $A$ a $C$ pasando por $B$. A estas doce formas simplemente hay que sumarle las cinco maneras en que podemos ir desde $A$ a $C$ directamente. En total hay $12 + 5 = 17$ maneras de ir desde $A$ hasta $C$. Este problema nos ilustra una idea distinta a la del principio multiplicativo que enunciamos a continuación.

**Principio Multiplicativo** El número de maneras de elegir un objeto de entre dos conjuntos $X$ y $Y$ sin elementos en común se obtiene al sumar los objetos que cada uno de estos conjuntos tiene.

En el problema anterior, el conjunto $X$ era el de las manera de llegar de $A$ a $C$ que pasaban por $B$ y $Y$ el de los caminos de $A$ a $C$. Estos dos principios son básicos en el desarrollo de la combinatoria y se encuentran en practicamente todos sus problemas. Podemos decir que con ellos se desarrolla toda la teoría. Solamente hay que recordar que si queremos contar $X$ **y** $Y$ se multiplican las cantidades de elementos y si queremos contar $X$ **o** $Y$ se suman.

## 2 Ejercicios

1. Decimos que un número es simpático si todos sus dígitos son impares. ¿Cuántos números simpáticos de seis dígitos hay?
2. Cada cuadro de una cuadrícula de $5 \times 6$ se colorea de blanco o de negro. ¿Cuántas coloraciones diferentes de la cuadrícula existen? Expresa el resultado como producto de números primos.
3. En una tienda hay 5 tipos de cuchara, 6 tipos de tenedor y 4 tipos de cuchillos. ¿De cuántas maneras podemos comprar dos objetos de distintos tipos?
4. ¿Cuántos números hay menores que 10000 que no tienen dígitos 0 ni 1?
5. ¿De cuántas maneras podemos elegir un portero, un capitán y un capitán suplente en un equipo de fútbol de once personas? (el portero puede ser capitán, o capitán suplente, pero el capitán y el capitán suplente deben ser personas distintas).
6. Se desea elegir un presidente, un tesorero y un secretario en un comité integrado por diez personas. ¿De cuántas maneras es posible hacer esto?
7. ¿De cuántas maneras podemos numerar a 6 jugadores de un equipo de fútbol rápido con los números del 1 al 6?
8. ¿De cuántas maneras se pueden formar 5 personas en una fila?

## 3 Problemas

1. Un cierto idioma tiene un alfabeto que cuenta unicamente con 10 letras. Una palabra es cualquier sucesión de a lo más 5 letras que no contiene letras repetidas. ¿Cuántas palabras tiene este idioma?
2. Se tiene una cuadrícula de $3 \times 3$. Se desea colorear algunos cuadritos de negro de manera que el perímetro de la región coloreada de negro sea 8 (la región coloreada puede no estar completamente conectada). ¿De cuántas maneras podemos hacer esto?
3. Entre las ciudades de San Juan, San Julián y San José hay varios caminos, cada uno de los cuales conecta a exactamente dos ciudades. De San Juan a San Julián podemos ir de 24 formas, pasando por San José. De San José a San Juan hay 18 formas, pasando por San Julián. De San Julián a San José hay 12 formas, pasando por San Juan. ¿Cuántos caminos directos hay entre San Juan y San José?
4. En cierto país hay varios aeropuertos. Una aerolínea ofrece diariamente vuelos directos que conectan cualesquiera dos aeropuertos. Cada día la aerolínea realiza 30 vuelos. ¿Cuántos aeropuertos hay?

## 4 Problemas Avanzados

1. Un tetraedro es un poliedro regular con 4 caras triangulares idénticas. ¿De cuántas formas podemos colorearlo con dos colores? Dos coloraciones son iguales si podemos rotar un tetraedro coloreado de una forma, de manera que se vea como la segunda coloración. No necesariamente deben usarse los dos colores.
2. Cuatro músicos tocan en una banda. En todas sus canciones hay un vocalista, un bajista, un baterista y un guitarrista. Deciden hacer una tocada que consistirá de 8 canciones.
   (a) Para no aburrirse, deciden que se irán cambiando los instrumentos de manera que ninguno toque el mismo instrumento en dos canciones consecutivas. ¿De cuántas maneras puede realizarse la tocada?
   (b) Los músicos deciden que como Alfredo toca muy bien la batería, debe de tocar al menos 4 canciones en este instrumento, pero de cualquier manera desean satisfacer la condición anterior. ¿De cuántas maneras pueden hacer esto?