34 Olimpiada Mexicana de MATEMÁTICAS Aguascalientes 2020

**PREÁLGEBRA**

Lilia Susana Castañeda Castañeda

## 1. Álgebra

El álgebra, como la aritmética, es una ciencia que trata con los números. En aritmética los números son representados por figuras que tienen valores determinados. En álgebra las letras del alfabeto se utilizan para representar los números, y cada letra puede representar cualquier número, excepto cuando una letra esté en una serie interconectada de operaciones, en cuyo caso la letra representará el mismo número. Dado que las letras empleadas en álgebra representan cualquier número, los resultados obtenidos deben ser igualmente ciertos para todos los números.

El álgebra se ha convertido en un área fundamental en las olimpiadas de matemáticas. Son frecuentes los problemas de este tema que aparecen en los concursos, y son también frecuentes los problemas de otras áreas que hacen uso del álgebra para su solución.

## 2. Traducción de expresiones algebraicas

Cuando queremos escribir un problema en lenguaje algebraico, sustituimos por letras el valor que desconocemos. Normalmente se usan las últimas letras del alfabeto para indicar las variables.

Por ejemplo, si decimos un número más 3, se traduce: $x+3$

Si decimos que hay un número multiplicado por 8 y se le agregan 5, lo representamos como:

$8n+5$

O bien, podemos preguntar:

¿Cuál es el número que dividido por 3 nos da 128?

Lo representamos como $x/3 = 128$

En esta página puedes practicar:

https://www.matematica7.com/traducir-expresiones-algebraicas1.html

## 3. Evaluación de expresiones algebraicas

Para evaluar una expresión algebraica, basta con sustituir la variable por el número.

Por ejemplo: En la expresión x+2, nos dicen que x = 3. Sustituimos la x por el 3, quedando:

3+2

El resultado es 5.

En la expresión 3x+8+2y, si x =5, y=2

Sustituimos

3(5)+8+2(2)

Hacemos las operaciones en el orden indicado por la jerarquía de los operadores: primero multiplicamos y después sumamos

15 + 8 +4

El resultado es 27

En estas páginas puedes practicar:

https://www.matematica7.com/evaluar-expresiones-algebraicas.html

https://www.thatquiz.org/tq/practicetest?5yd0jmux18284

https://es.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-intro-to-algebra/alg-evaluating-expressions-word-problems/a/evaluating-expressions-review

## 4. Leyes de los Signos

### 4.1 Sumas y Restas

Si son signos iguales se suman y se pone el signo que tienen ambos. Si son signos diferentes, se restan y se pone el signo de la cantidad mayor.

Por ejemplo

$$33 + 11 = 44$$

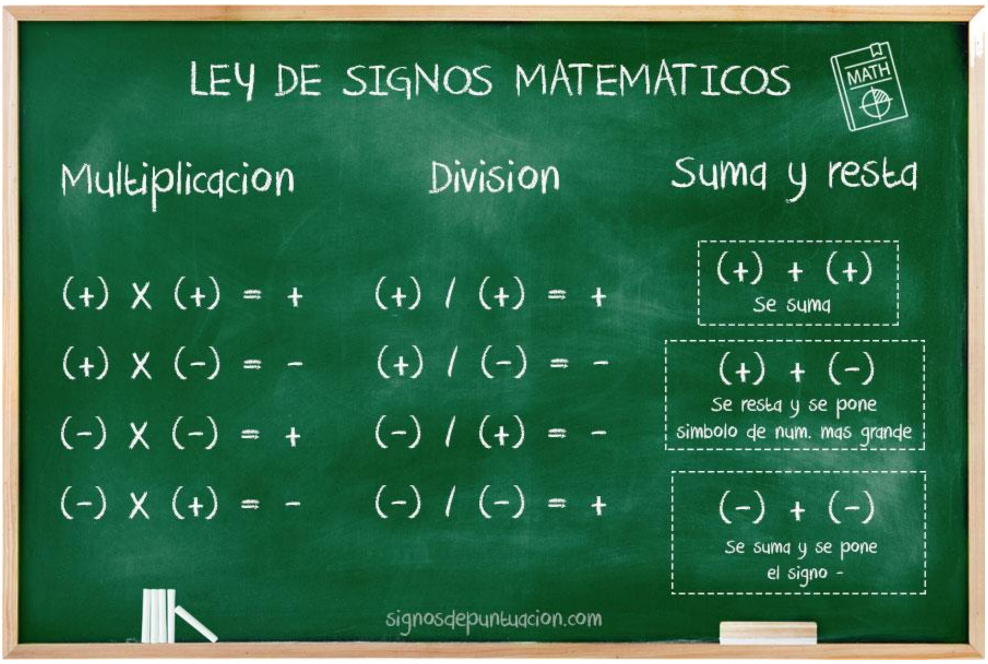
$$-19 - 1 = -20$$

$$4 - 2 = 2$$

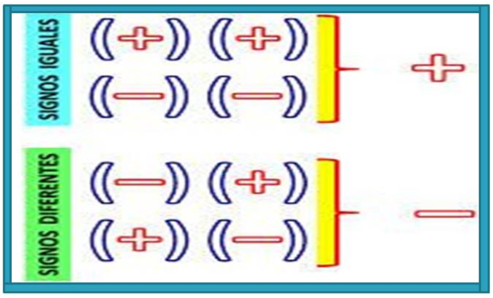
$$2 - 7 = -5$$

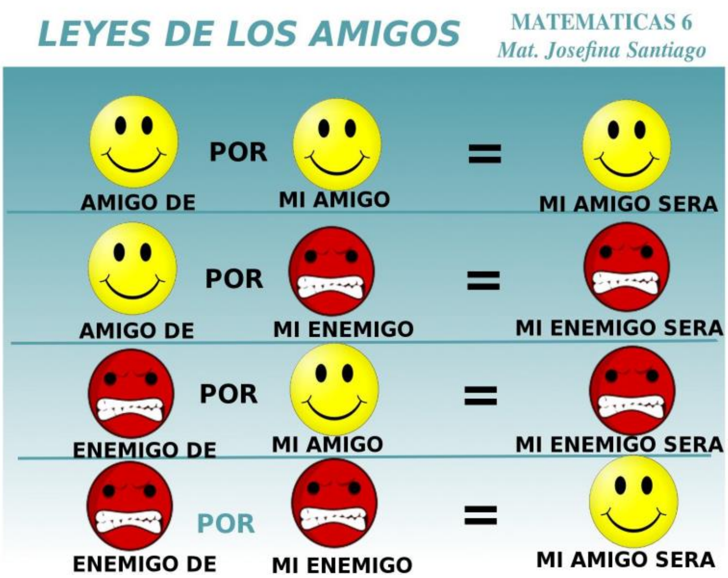
### 4.2 Multiplicaciones y Divisiones

Si los números que intervienen en la multiplicación o división tienen signos iguales, el signo del resultado será positivo, de lo contrario el resultado será negativo.




Para las multiplicaciones y divisiones:



## 5. Símbolos de agrupación

Para agrupar expresiones algebraicas se suele ocupar paréntesis (), corchetes [ ] o llaves {}. Todos indican lo mismo: que la parte encerrada por ellos deben tomarse como una cantidad. Aunque solamente podríamos usar paréntesis, corchetes o llaves, el uso de estos tres facilita la lectura de las expresiones; por ejemplo $11+(7-(4x(6-)))^2$ es un poco más difícil de leer que $11+\{7-[4x(6-3)]\}^2$.

Cuando se usa la barra de división como

$$\frac{4+8}{1+2}$$

esta también agrupa, se deben hacer las operaciones del numerador

y el denominador por separado y luego hacer la división, en este caso

4+8 =12

1+2=3

12/3=4

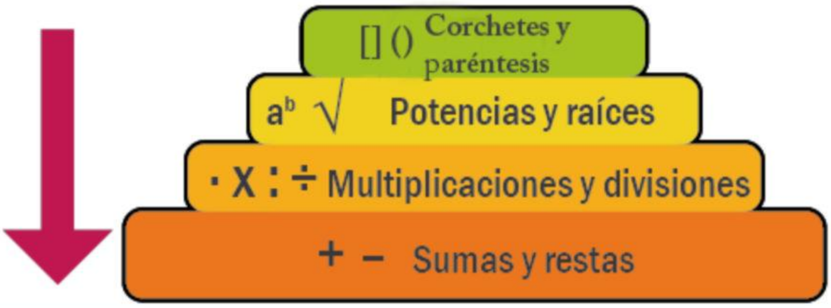
## 6. Datos de vital importancia

Si quieres un pequeño descanso, revisa los siguientes datos de vital importancia (TIENES PROHÍBIDO REVISAR LAS LIGAS ANTES DE ACABAR DE LEER EL MATERIAL):

1. Conforme a la Comisión Geodésica de Guanajuato y la Comisión de Estadística y Geografía Mexicana, el centro geográfico de México es la montaña del cubilete, en Silao, Guanajuato. https://www.elsoldemexico.com.mx/republica/cristo-rey-es-el-centro-geografico-de-mexico-205996.html
2. Posada creó al personaje de la Catrina en un período de depresión en 1912, pero el grabado no se publicó hasta noviembre de 1913, 10 meses después del fallecimiento del grabador. https://www.milenio.com/cultura/catrina-significado-origen
3. El cero fue incluido en el sistema numérico índico hace 1500 años. https://www.lavanguardia.com/vida/20160418/401188613119/origen-cero-implicacion-historia.html

## 7. Orden de las operaciones

1. Al evaluar una expresión, primero hay que hacer las operaciones dentro de la agrupación, paréntesis, corchetes y llaves. Si están anidados, primero evaluar la expresión a partir de los paréntesis internos y seguir evaluando hasta llegar a los paréntesis externos.
2. Después las potencias y raíces están al mismo nivel, y son las siguientes en ser evaluadas.
3. Continúa con las multiplicaciones y las divisiones.
4. Al final se hacen las sumas y las restas.




¡¡RECUERDA: MULTIPLICACIONES, DIVISIONES, SUMAS Y RESTAS, DE IZQUIERDA A DERECHA!!

Ejemplo:

$2x\{2+3x(4+5x[1+2]^{2}+1)\}$

Se resuelve primero la suma entre corchetes [1+2], aplicando el principio 1, que son primero las agrupaciones iniciando de las más internas.

El resultado (3) se eleva al cuadrado, usando el principio 2 (potencias y raíces) . $3^2=9$

Lo multiplicamos por 5, usando el punto 4 (multiplicaciones y divisiones) 9x5=45

Continuamos con las operaciones que están dentro del paréntesis, ya que es la agrupación que sigue tomando en cuenta lo interior al exterior. 4+45+1 =50

Multiplicamos el resultado por 3, ya que es en la jerarquía se hacen primero las multiplicaciones y divisiones, y después las sumas y las restas. 50x3 =150

Sumamos 2, ya que es la última agrupación que tenemos por resolver 150+2 =152

Y Finalmente multiplicamos por 2.  152x3 =304

Te recomiendo que practiques con el siguiente juego en línea:

https://www.genmagic.net/mates4/jerarquia_opera_c.swf

**Ejemplos**

1. $20 \div 5 \times 4 = 4 \times 4 = 16$
2. $2^{2^3} - 5^2 = 2^8 - 25 = 256 - 25 = 231$
3. $6 \div 3 + 4 \times 2 = 2 + 8 = 10$
4. $6 \times 4 - 12 \div 3 - 8 = 24 - 4 - 8 = 12$
5. $4 \times 4 - 3 \times 3 - 16 \div 4 = 16 - 9 - 4 = 3$
6. $20 - (3 \times 2^3 - 5) = 20 - (3 \times 8 - 5) = 20 - (24 - 5) = 20 - 19 = 1$
7. $(5+2)^2 - 9 \times 3 + 2^3 = 7^2 - 9 \times 3 + 2^3 = 49 - 9 \times 3 + 8 = 49 - 27 + 8 = 30$
8. $(12 \div 3 + 4) - (4^2 - 6 \times 2) = (12 \div 3 + 4) - (16 - 6 \times 2) = (4+4) - (16-12) = 8 - 4 = 4$
9. $(5^2 - 5)/(4^2 + 8 - 7 \times 2) = (25 - 5)/(16 + 8 - 7 \times 2) = (25-5)/(16+8-14) = 20/10 = 2$
10. $(3^3 - 9/3) + (4 \times 3 - 3^2) = (27 - 9/3) + (4 \times 3 - 9) = (27 - 3) + (12 - 9) = 24 + 3 = 27$
11. $(7 - \sqrt{9}) \times (4^2 - 3 + 1) = (7 - 3) \times (16 - 3 + 1) = 4 \times 14 = 56$
12. $\dfrac{2^4 + (16 - 3 \times 4)}{(6 + 3^2) \div (7-4)} = \dfrac{2^4 + (16-12)}{(6+9) \div 3} = \dfrac{2^4 + 4}{15 \div 3} = \dfrac{16+4}{5} = \dfrac{20}{5} = 4$
13. $11 + \{[4(6-3)] - 7\}^2 = 11 + \{[4(3)] - 7\}^2 = 11 + \{12 - 7\}^2 = 11 + 5^2 = 11 + 25 = 36$

## 8. Leyes de los exponentes

Cuando una multiplicación consiste de un mismo factor repetido varias veces se le llama potencia. Entonces $xx$ es llamada la segunda potencia de $x$, $xxx$ la tercera potencia de $x$, y así sucesivamente. A la segunda y tercera potencia comúnmente se le llama *cuadrado* y *cubo* respectivamente.

Para facilitar la escritura de $xx$, $xxx$, $xxxx$, … se escribe $x^2$ , $x^3$,$x^4$,..., si $x$es factor $n$ veces, se escribe $x^n$. De la misma forma se puede escribir $a^3b^2$ en lugar de $aaabb$. En la expresión $x^n$a $x$ se le llama *base* y a $n$ *exponente*. Cuando solamente tenemos el factor $x$, se puede escribir $x^1$, así pues $x = x^1$.

Debemos que tomar en cuenta que: $a^0 = 1$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ y $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, para algún $n$ entero positivo. Las reglas de los exponentes son:

A. $a^{(x+y)} = a^x a^y$.
B. $a^{xy} = (a^x)^y$.

Aquí, $x$ y $y$ son números enteros o fraccionarios, y $a$ es cualquier número real tal que la operación indicada tenga sentido (por ejemplo $0^{-1}$ y $(-1)^{\frac{1}{2}}$ no tienen sentido pues en el primer caso nos indicaría una división entre 0 y en el segundo caso se buscaría un número real cuyo cuadrado fuera -1.)

La regla A se puede entender como si se tuvieran $x + y$ veces multiplicándose las $a's$, lo cual equivale a tener $x$ veces $a$ multiplicadas por $y$ veces $a$.

La regla B se puede entender como si se tuvieran $xy$ veces multiplicándose las las $a's$, lo cual equivale a tener $x$ veces $a$, lo cual se multiplica $y$ veces por sí misma.

Usando las reglas anteriores podemos ver los siguientes casos

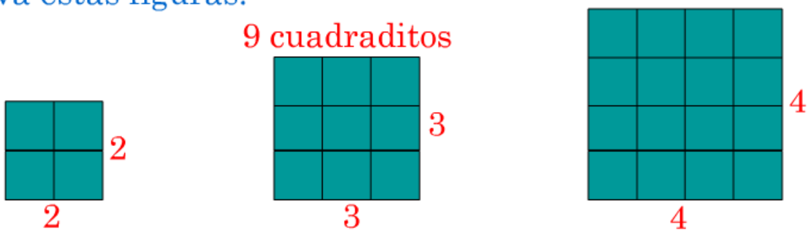
I. $\frac{a^m}{a^n} = a^m a^{-n} = a^{m-n}$ o también $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{-m}a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)}$

II. $(\frac{a}{b})^m = (ab^{-1})^m = a^m b^{(-1)m} = a^m b^{-m} = \frac{a^m}{b^m}$

## NÚMEROS AL CUADRADO

Las **potencias** que tiene como exponente el número 2, se denominan **cuadrados**.

Observa estas figuras.




$2^2 = 2 \times 2 = 4$ — Se lee: 2 al cuadrado

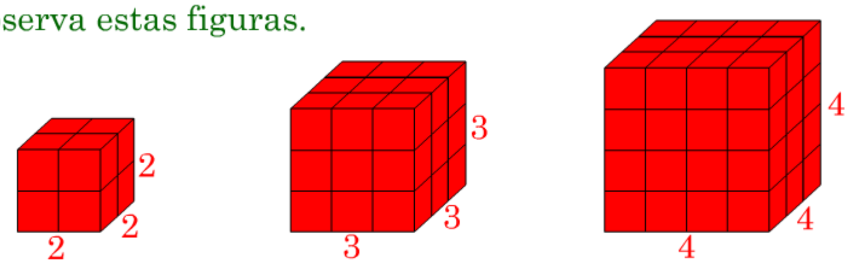
$3^2 = 3 \times 3 = 9$ — Se lee: 3 al cuadrado

$4^2 = 4 \times 4 = 16$ — Se lee: 4 al cuadrado

## NÚMEROS AL CUBO

Las **potencias** que tienen como exponente el número 3, se denominan **cubos**.

Observa estas figuras.




$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ — Se lee: 2 al cubo

$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$ — Se lee: 3 al cubo

$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ — Se lee: 4 al cubo



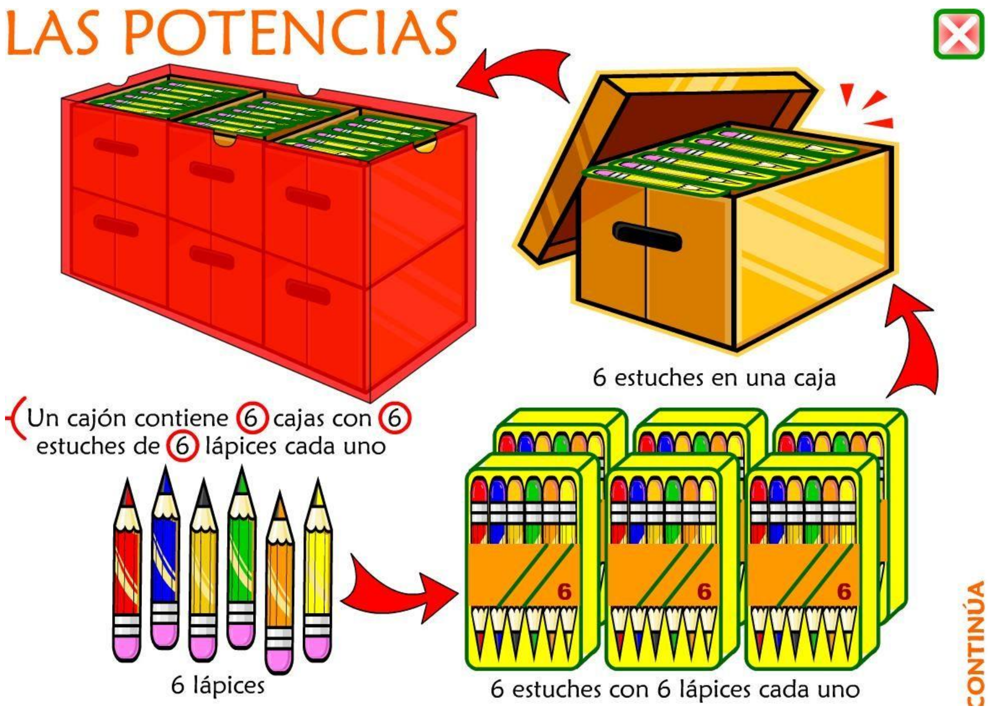
## LEYES DE EXPONENTES

| Ley de exponentes | | Ejemplo |
|---|---|---|
| Cuando se multiplican dos potencias de la misma base, los exponentes se suman. | $a^m \times a^n = a^{m+n}$ | $(x^2)(x^3)=x^5$ |
| Cuando se dividen dos potencias de la misma base, los exponentes se restan. | $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ | $\frac{a^8}{a^5}=a^3$ |
| Cuando una potencia se eleva a otra potencia, los exponentes se multiplican. | $(a^m)^n = a^{(m)(n)}$ | $(a^2)^3=a^6$ |
| El producto de dos o más factores elevados a una misma potencia es igual producto de los factores elevados, cadauno, al exponente del producto. | $(ab)^m = a^m b^m$ | $(a^2b^3)2=a^4b^6$ |
| El cociente elevado a una potencia es igual a dividir el numerador elevado a la potencia entre el denominador elevado a la misma potencia. | $(\frac{a}{a})^m=\frac{a^m}{a^m}$ | $(\frac{a^2}{a^3})^2=\frac{a^4}{a^6}$ |



Exponente es el término utilizado en matemáticas para indicar el número de veces que una cantidad se ha de multiplicar por sí misma.
En los cálculos, los exponentes siguen ciertas reglas llamadas leyes de los exponentes.

Ejemplos:




Si quisiéramos saber la cantidad total de lápices que hay en una caja tenemos que multiplicar 6 lapices por 6 estuches, así tenemos el total de lápices por caja 6x6 = 36, también se puede escribir $6^2$. Para saber el total de lápices en el cajón, tenemos que multiplicar el total de lápices en una caja por 6. Así tenemos 6x6x6 = $6^3$ =216.

Puedes consultar la página

https://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/exponentes-leyes.html

También puedes practicar en las siguientes páginas

http://www.genmagic.net/mates4/ser7c.swf

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/41009470/helvia/aula/archivos/repositorio/0/193/html/recursos/la/U02/pages/recursos/143304_P21/es_carcasa.html

## 9. Radicales

Cuando un número al elevarlo al cuadrado es igual a $x$, se llama raíz cuadrada de $x$ y se representa como $\sqrt[2]{x}$ o simplemente como $\sqrt{x}$, también se puede representar como $x^{\frac{1}{2}}$. Cuando un número al elevarlo al cubo es igual a $x$, se llama raíz cúbica de $x$ y se representa como $\sqrt[3]{x}$ o bien como $x^{\frac{1}{3}}$.

En general cuando un número al elevarlo a la potencia $n$ es igual a $x$, se llama raíz enésima de $x$ y se representa como $\sqrt[n]{x}$. También se puede representar como $x^{\frac{1}{n}}$. En la expresión $\sqrt[n]{x}$ al símbolo $\sqrt{\ }$ se le llama radical, a $n$ se le llama índice y a $x$ radicando.

Diciendo lo anterior de una forma más formal, $n$ es la raíz n-ésima de $x$ sí y solamente si $r^n = a$.

Por la definición anterior podemos decir que 4 y -4 son la raíz cuadrada de 16, ya que $4^2 = (-4)^2 = 16$; o que 3 es la raíz cúbica de 27.

En general, si $n$ es número impar y $a$ un número real, siempre existe un único número real que sea la raíz n-ésima de $a$. Sin embargo, si $n$ es par, no existe un número real que sea la raíz n-ésima de $a$ en caso de que $a$ sea un número negativo, pero tendrá dos raíces n-ésimas si $a$ es un número positivo.

Cuando se tienen dos raíces, a la raíz positiva se le llama raíz principal. Si se quiere representar la raíz negativa, se tiene que escribir el símbolo menos ( - ) antes del radical: $-\sqrt{64} = -8$. Si se quieren representar las dos raíces se escribe el símbolo $\pm$ antes del radical, por ejemplo $\pm\sqrt[4]{625 = \pm 5}$.

Usando lo anterior y las leyes de los exponentes podemos deducir las siguientes propiedades.

A. $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a}\,)^m = \sqrt[n]{a^m}$
B. $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
C. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
D. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Probando las propiedades anteriores tenemos que

A. $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
B. $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$
C. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = (\frac{a}{b})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
D. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (\sqrt[n]{a})^{\frac{1}{m}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$

## 10. Problemas

Traducción de expresiones algebraicas

1. Con fósforos se pueden armar figuras como estas.

   a. ¿Cuántos fósforos hay que colocar para formar 6 triángulos?
   b. ¿Y para armar 59 triángulos?
   c. ¿Se puede armar una secuencia de triángulos con 29 fósforos? ¿Cómo se dieron cuenta?
   d. ¿Cuáles de estas fórmulas permiten calcular el número total de fósforos que se necesita para formar n triángulos? ¿Cómo se dieron cuenta?
      i. $2 \times n + 3$
      ii. $3 \times n + 2$
      iii. $5 + 3 \times (n - 1)$
      iv. $5 \times n$
2. Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones si $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ y $d = 4$.
   a. $5a + 3c - 3b - 2d$
   b. $26a - 3bc + d$
   c. $ab + 3bc - 5d$
   d. $bcd + cda + dab + abc$
3. Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones si $a = 3$, $b = 1$, y $c = 2$.
   a. $2a^3 - 3b^2 - 4c^3$
   b. $2a^2b - 3b^3c^2$
   c. $\frac{1}{16}c^3 - \frac{1}{2}b^3$
   d. $2a^4b^2c - 3b^4c^2a - 2c^4a^2b$
4. Encuentra el valor numérico de las siguientes expresiones si $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$ y $d = 0$.
   a. $(3a + 4d)(2b - 3c)$
   b. $a^3 - b^3 - 2(a - b + c)^3$
   c. $3(a + b)^2(c + d) - 2(b + c)^2(a + d)$
   d. $\frac{2a^2}{b+c} - \frac{2b^2}{c+a} - \frac{2c^2}{b+d} + \frac{2d^2}{a+b}$
5. Simplifica
   a. $(-2a^2c^3)(-3a^3b^2c)$
   b. $(-3a^2b)(-5ab^3)(-7a^4b^2)$

c. $\frac{3ax^2y}{6a^2xy}$
d. $\frac{30a^2b^3c^5x^2y^4z^8}{36a^5bc^2x^5yz^6}$
e. $\frac{3a^7b^2c^{10}x^8yz^4}{a^6c^4x^3y^6}$

6. Cada una de las siguientes expresiones se pueden llevar a una expresión de la forma $x^n$, encuentra el valor de $n$.
   a. $\frac{(x^2)^3x^{2^4}x^{-2^3}}{x^{-4^2}x^{(-3)^2}x^{12}}$
   b. $\frac{((x^2)^4)^5(x^{-2})^{2^4}x^{-(-3)^3}(x^2)^4x}{x^{2^{3^0}}x^{(-1)^{2^2}}x^{3^3}}$
   c. $[(x^x)^{(x^x)^2}]^{x^{-1-2x}}$
7. Simplifica $(9^{-2^{-1}}+36^{-4^{-2^{-1}}}+8^{-9^{-2^{-1}}})^8+2^{-2^2+4}$
8. Si $a^b=2$ y $b^a=3$ calcula la expresión $\frac{a^{2b}2^ab^{2a}3^b}{6(ab)^{ab}}$.
9. Calcula el valor de $x$ si $64^{2^{1-x}}=8^{2^{x+1}}$.
10. Calcula $\frac{10^{2000}+10^{2002}}{10^{2001}+10^{2001}}$.
11. Simplifica $\frac{2^{2001}\times 3^{2003}}{6^{2002}}$.
12. El número $25^{64}\cdot 64^{25}$ es el cuadrado de un entero positivo *N*. ¿Cuál es la suma de los dígitos de *N*?
13. Calcula el valor de $b$ sabiendo que $\frac{2+b^{-1}}{2^{-1}+b}=5$.
14. Calcula el valor de $n$ para que la igualdad $3^{100}3^n=\frac{1}{9}$ sea válida.
15. Calcula el valor de $n$ para que la igualdad $\frac{2^{100}}{2^n}=8$ sea válida.
16. Calcula el valor de $m$ para que la igualdad $4^{50}=2^m$ sea válida.
17. ¿A qué potencia hay que elevar $4^4$ para obtener $8^8$?
18. ¿Cuál es el menor entero positivo $x$ para el cual $\frac{1}{32}=\frac{x}{10^y}$ para algún entero $y$?
19. Si $2^x=2(16^{12})+2(8^{16})$, calcula el valor de $x$.
20. Si $16^x=2^{x+5}-2^{x+4}$, calcula el valor de $x$.
21. Si $2^{2x-4}=8$, calcula el valor de $x$.
22. La gráfica de $y=m^x$ pasa por los puntos $(2,5)$ y $(5,n)$ ¿Cuál es el valor de $mn$?
23. Sin utilizar calculadora, demuestra que $\sqrt[3]{3}$ es mayor que $\sqrt{2}$.
24. Simplifica
    a. $s^{\frac{5}{2}}s^{\frac{-4}{5}}s^{\frac{-1}{6}}$
    b. $\sqrt[3]{(a^4b^{-2})^6}$
    c. $\sqrt[3]{3x^2y}\sqrt[3]{9x^5y^2}$
    d. $\sqrt{64x^{16}y^{20}}$
    e. $\sqrt[4]{81x^{12}y^{24}}$
    f. $\sqrt[6]{128x^{13}y^{18}z^{37}}$

25. Simplifica
    a. $\sqrt[4]{4}\sqrt{\frac{9}{2}}\left(\frac{\sqrt{50}+\sqrt{72}-2\sqrt{32}}{\sqrt{18}}\right)$
    b. $\frac{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}}$
26. Escribir $2^5+2^5$ como potencia de 2.
27. ¿Cuál es la mitad de $2^{98}$?
28. En cierto planeta hay tantos días en una semana como semanas en un mes como meses en un año. Si un año tiene 1331 días, ¿cuántos días tiene cada semana?
29. Si $m$ y $n$ son enteros positivos que satisfacen $m^n+m^{n+1}+m^{n+2}=39$, entonces ¿cuánto vale $n^m$?
30. Si $2^a=5^b=10$, ¿cuánto vale $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$?

## 11. Vídeos

Evaluación de expresiones algebraicas:
https://www.youtube.com/watch?v=VuVjpKDihRs
Orden de las operaciones:
https://youtu.be/3DmcRUHpPcg
Leyes de los exponentes:
https://www.youtube.com/watch?v=-mfIW3AB5Mw
Radicales:
https://www.youtube.com/watch?v=ptP3J7pXVX4