Tema Avanzado de combinatoria
Particiones

Alfredo Arturo Elías Miranda
alfredo.elias@cimat.mx

22 de diciembre de 2018

Antes de leer esto, se recomienda leer el tema de funciones generatrices, ya que se van a usar para dar relaciones y varias cosas. Si leen el tema de generatrices, esto les puede dar intuición de como se usan las funciones generatrices y les ayudará a dejar más en claro este tema.

1 Introducción

Las particiones de un número n natural se definen como el número de formas en que se puede escribir n como suma de enteros positivos, sin importar el orden en que se hacen las sumas solo los números sumados para obtener n. Usualmente, la particiones de n se denotan por $p(n)$. Veamos el siguiente ejemplo de las particiones de 5.

$$\begin{aligned}5 &= 1+1+1+1+1\\ &= 1+1+1+2\\ &= 1+1+3\\ &= 1+2+2\\ &= 2+3\\ &= 1+4\\ &= 5\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $p(5) = 7$, dado a que existen 7 particiones diferentes del 5. Ahora vamos a ver algunas aplicaciones de generatrices en las particiones y como es que las particiones y las funciones generatrices se pueden usar para poder resolver algunos problemas en la olimpiada de matemáticas. Además de algunos trucos que pueden ser útiles.

2 Herramientas para trabajar con Particiones

2.1 Funciones generatrices

Sea $G(x)$ la función generatríz asociada a la sucesion de las particiones $a_1, a_2, \ldots$ donde $p(i) = a_i$. Ahora, veamos que $G(x)$ puede ser representada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} G(x) &= (x^{0\cdot 1} + x^{1\cdot 1} + x^{2\cdot 1} + \cdots)(x^{0\cdot 2} + x^{1\cdot 2} + x^{2\cdot 2} + \cdots)(x^{0\cdot 3} + x^{1\cdot 3} + x^{2\cdot 3} + \cdots)\cdots \\ &= \prod_{i=1}^{\infty}(x^{0\cdot i} + x^{1\cdot i} + x^{2\cdot i} + \cdots) \\ &= \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^i}, \quad \text{tomando } n \text{ grande y } |x| < 1 \end{aligned}$$

Esta es la función generatriz que describe a las sucesión antes dada. Esto es porque se elige cuantas veces ya a apareces cierto número en las particiones del número que estamos tomando, el coeficiente de x^n tiene el número de particiones de n. Esta función generatriz nos puede ayudar a encontrar algunas relaciones entre tipos de particiones. Sin necesidad de tener que calcular el valor de las particiones como tal.

Ejercicio 2.1.1. Llamemos $p_1(n)$ como las particiones de n que no usan al 1. Encontrar una relación entre las particiones descritas anteriormente, $p(n)$ y $p_1(n)$.

Solución Sea $G_0(x)$ la función generatriz de las particiones $p(n)$ y $G_(x)$ la función generatriz de las particiones $p_1(n)$. Por lo anterior, sabemos que

$$G_0(x) = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^i}$$

Así que buscando una función generatriz para $p_1(n)$, tenemos lo siguiente (vamos a usar una idea parecida a la usada para encontrar $G_0(x)$).

$$\begin{aligned} G_1(x) &= (x^{0\cdot 2} + x^{1\cdot 2} + x^{1\cdot 2} + \cdots)(x^{0\cdot 3} + x^{1\cdot 3} + x^{1\cdot 3} + \cdots)\cdots \\ &= \prod_{i=2}^{\infty}\frac{1}{1-x^i} \\ &= (1-x)\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^i} \\ &= (1-x)G_0(x) \qquad (1) \end{aligned}$$

Por lo tanto, esto nos va a generar la siguiente igualdad, tomando los terminos que tienen a x^n, por (1), tenemos que

$$p_1(n)x^n = p(n)x^n - p(n-1)x^n$$

De lo cual podemos concluir que $p_1(n) = p(n) - p(n-1)$, que es la relación que buscabamos encontrar.

Este es un ejemplo de como podemos usar las funciones generatrices para poder encontrar relaciones entre los diferentes tipos de particiones que podemos hacer. También esto es algo que en general se puede de tratar hacer cuando se manejan funciones generatrices.

2.2 Algunos casos especiales

Las particiones también se pueden usar para resolver algunos problemas que pueden ser resuletos por separadores, pero de forma más rápida.

Ejercicio 2.2.1. Encontrar todas las soluciones no negativas de la siguiente ecuación,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 32$$

Solución :

Solución 1: Vamos a resolver este problema de dos maneras, primero usando separadores. Para resolver este problema con separadores, vamos a crear 5 separadores, para separar 32 en 5 partes que pueden ser vacía. Así que esto lo podemos hacer de $\binom{37}{5}$ maneras.

Solución 2: Ahora vamos a resolver este problema usando las particiones que ya vimos. Primero veamos que la siguiente función generatriz nos ayuda a resolver el problema,

$$G(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)^6$$

Esta función sirve, porque cierto exponente de x al desarrollar $G(x)$ se obtiene de sumar 6 potencias de x. Además, veamos que

$$\begin{aligned} G(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)^6 \\ &= \frac{1}{(1-x)^6} \\ &= \binom{5}{5} + \binom{6}{5}x + \binom{7}{5}x^2 + \cdots \end{aligned}$$

Por lo tanto, buscando el coeficiente del término x^32 obtenemos el resultado, que es $\binom{32}{5}$

3 Ejercicios

Estos son algunos problemas de particiones que ilustran algunos trucos y cuentas que pueden hacer con las particiones. Les recomiendo que antes de hacer estos problemas vean la teoría de funciones generatrices para que se les hagan más sencillos los problemas. Igual si quieren pueden mandarme correo en cualquier momento para preguntarme dudas o pedirme hits, aunque no prometo contestar de inmediato. Recuerden que mi correo es *alfredo.elias@cimat.mx*. Suerte

Problema 1. Demuestra que si $p(n)$ denota las particiones usuales de n, entonces

$$p(2n) \geq p(1) + \cdots + p(n)$$

Problema 2. ¿Cuántos términos quedan después de expandir la siguiente expresión,

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)^8?$$

Problema 3. Demuestra que dado n un entero mayor que uno, k un entero positivo, entonces n^k se puede escribir como la suma de n impares positivos.

Problema 4. Sean a_1, a_2, a_3, a_4 enteros no negativos, ¿cuántas soluciones tiene la siguiente desigualdad,

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 70 \text{ ?}$$

Problema 5. Si 999 se particiona en 4 números, a, b, c, d. Encuentra todas las cuartetas a, b, c, d que cumplen que $a + 3 = b - 3 = 3c = \frac{d}{3}$.

Problema 6. Prueba que el número de particiones de n tales que todos los elementos de la partición son menores que k es igual al número de particiones de $n + k$ en exactamente k partes.

Problema 7. Muestra que el número de particiones ordenadas de n en k partes es

$$\binom{n-1}{k-1}$$

Problema 8. Prueba que si $n > \frac{m(m+1)}{2}$, entonces el número de particiones de n en m partes distintas, es igual al número de particiones de $n - \frac{m(m+1)}{2}$ en a lo más m partes, no necesariamente diferentes.

Problema 9. ¿De cuántas maneras su puede representar un entero n como la suma de dos enteros poditivos? ($a + b$ representada por (a, b) se considera igual a (b, a)).

Problema 10. Demuestra que el número de particiones de n en partes distintas es igual al número de particiones de n en números impares.