

Paridad
15/Junio/2019
UAA
Taller general

Paridad

La paridad de un número entero podría definirse de muchas formas, pero básicamente es la clasificación de los números enteros en dos tipos: Pares e impares, con base en algunas características:

Los números pares, tienen mitad, se pueden dividir en parejas, son múltiplos de 2, son todos aquellos números enteros que terminan en las cifras 0, 2, 4, 6 u 8, además se pueden escribir como la multiplicación de 2 por un número entero (son de la forma $2k$).

Los números impares, no tienen mitad, al dividirlos en parejas sobra uno, no se pueden dividir entre dos, no son múltiplos de 2, son todos aquellos números que terminan en las cifras 1, 3, 5, 7 o 9, además se pueden escribir de la forma $2k + 1$.

Ejemplos de números pares son 0, 14, -18, 106, -24, 368. Ejemplos de números impares son 1, -1, -7, 11, 2019, -1001.

Paridad de la suma

Al estar realizando sumas, es frecuente encontrarse con problemas que a veces nos preguntan si es posible hacer algo o no, pareciendo muchas veces complicado probar todas y cada una de las posibles formas de intentarlo, por ejemplo el siguiente problema.

(Examen selectivo ONMAPS 2019 Aguascalientes - Primero de secundaria)

¿Existen dos números enteros consecutivos cuya suma sea múltiplo de 6? Justifica tu respuesta.

En este caso, la pregunta pareciera difícil de contestar si sólo pensamos en que habría que intentar todas las posibles sumas, ya que la cantidad de parejas de números consecutivos es infinita. Así que parece imposible probar todas las parejas, ahora bien, suena interesante probar los primeros números por si de casualidad funciona alguno.

$1 + 2 = 3$ - No cumple

$2 + 3 = 5$ - No cumple

$3 + 4 = 7$ - No cumple

$4 + 5 = 9$ - No cumple

Ahora bien, podemos observar varias cosas:

Primero, ninguno de las parejas de números consecutivos probadas funciona.

Segundo, para que un número sea múltiplo de 6, debe de ser múltiplo de 2 y de 3.

Tercero, algunos de los números generados son múltiplos de 3.

Cuarto, todos los números generados son impares.

De esas observaciones, podemos pensar que la suma de dos números enteros consecutivos siempre es impar. Veamos ahora por qué. Si un número es par, el siguiente consecutivo debe ser impar y por lo tanto la suma de un par más un impar daría un número impar. Por el otro lado, si el número es impar, el siguiente consecutivo sería un número par, y su suma por lo tanto sería impar.

Así pues, es imposible generar dos números consecutivos cuya suma sea par, sin lugar a dudas.

De aquí podemos observar la gran utilidad de analizar si un número es par o impar al realizar un problema. Para ser más exactos, al hecho de que un número sea par o impar, le llamaremos paridad.

Paridad de la suma

Al sumar dos números cuya paridad conocemos, es fácil saber la paridad del resultado de la suma con estas reglas simples:

Par + Par	Par
Impar + Par	Impar
Par + Impar	Impar
Impar + Impar	Par

Estas reglas pueden resumirse con la siguiente regla: “La suma de dos números con la misma paridad es par y la suma de dos números con distinta paridad es impar”.

Se puede además hacer una analogía con las reglas de los signos al multiplicar números positivos y negativos, pensando el número impar como el signo negativo y el número par como el signo positivo:

Par + Par	+ x +	Par	+
Impar + Par	- x +	Impar	-
Par + Impar	+x -	Impar	-
Impar + Impar	- x -	Par	+

Ahora bien otro caso interesante es cuando sumamos varios números de los cuales conocemos su paridad, por ejemplo en el siguiente problema:

Un niño fue a la tienda a comprar pan. La cuenta fue de 55 pesos, al pagar utilizó 16 monedas exactamente. ¿Es posible que sólo haya utilizado monedas de 1 y 5 pesos?

En este problema, el truco está en observar que podemos analizar la paridad de la cantidad pagada, en vez de intentar formar la cantidad pedida con esas monedas. Primero observemos que las dos monedas que nos piden utilizar tienen cantidades impares. Vamos a utilizar 16 monedas, el cual es un número par de monedas. Imaginemos que tenemos una forma de realizar lo pedido. Al sumar los valores de las monedas, como son 16, podemos formar 8 parejas de monedas, hacer la suma de sus valores y luego sumar el resultado. Por ejemplo si usáramos 5 monedas de un peso y 11 de cinco pesos, podríamos calcular su valor total sumando $1 + 1$, $1 + 5$, $1 + 1$, $5 + 5$, $5 + 5$, $5 + 5$, $5 + 5$, $5 + 5$ y $5 + 5$ obteniendo un valor total de 60 pesos (el cual no es una configuración válida para lo que nos pide el problema). Entonces pues, al hacer esto con la posible configuración de monedas válida, la suma de cada pareja sería la suma entre dos monedas de valor impar, por lo cual su suma será par. Luego entonces la suma total de las monedas sería la suma de 8 valores pares. Regresando a las reglas que comentamos, aquí es más que claro que al sumar sólo valores pares, la suma tendrá que ser par, pero el 55 no es par, por lo cual la suposición de que podía hacerse lo que pedía el problema es incorrecta.

Entonces pues, con toda la certeza, podemos responder que no es posible haber pagado sólo con monedas de 1 y 5 pesos.

Así pues, tenemos otro resultado interesante:

Si sumamos sólo números pares, el resultado nos debe de dar par
Si sumamos una cantidad par de números impares, el resultado nos debe de dar par
Si sumamos una cantidad impar de números impares, el resultado nos debe de dar impar
En general, la única forma de generar impares con una suma, es que haya una cantidad impar de números impares entre los que se están sumando

Paridad en la resta

Ahora bien, analizar la paridad en la resta es exactamente igual que en la suma, pues si pensamos la resta como sumar números negativos, y nos damos cuenta que un número y su negativo tienen siempre la misma paridad, entonces, las reglas se aplican de la misma manera. Es por esto que la paridad de la suma o resta es exactamente la misma si se suma o se resta. Esto es extremadamente útil sobre todo en problemas donde tenemos que restar o sumar varios números y necesitamos conocer la paridad del resultado.

Problemas

Problema 1. Un nadador para entrenar realiza sesiones de entrenamientos de 3, 5 y 7 kilómetros. Su entrenador le recomienda entrenar un total de 35 kilómetros. ¿Podrá realizarlos en 10 sesiones?

Problema 2. Un cuadrado mágico es una cuadrícula en la cuál se escriben números enteros de forma tal que las sumas de cualquier columna, fila o diagonal son todas iguales. ¿Puede hacerse un cuadrado mágico de 6×6 usando los primeros 36 números primos?

Problema 3. Un gusano se desplaza verticalmente sobre un árbol. Cada día puede solamente subir o bajar. Si el primer día recorre 1cm, el segundo día recorre 2cm y así sucesivamente. ¿Será posible que después de 17 días el gusano se encuentre en el lugar donde partió?

Problema 4. César y sus amigos están sentados formando un círculo, de forma que los dos vecinos de cada amigo son del mismo sexo. Si de los amigos de César 10 son mujeres. ¿Cuántos hombres hay?

Problema 5. ¿Se pueden colocar los signos “+” y “-” en los cuadrados entre los números

$$\square 1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 \square 10 \square 11 \square 12$$

de manera que el resultado nos dé 13?

Problema 6. El producto de 22 enteros es igual a 1. Muestra que su suma no puede ser cero.

Problema 7. Encontrar todas las parejas de números primos p y q tales que su suma es igual a su producto.

Paridad en otras situaciones

La paridad de alguna situación no sólo se puede analizar en situaciones donde se suman números. A veces, es posible analizar la paridad de otras situaciones más complejas o que no pareciera que pueda analizarse de inicio. Por ejemplo, el siguiente problema:

En el pizarrón están escritos once números 1. Una posible operación es tomar dos números y sumarle a ambos 1, restarle a ambos 1 o sumarle 1 a uno de los números y restarle uno a otro. ¿Es posible mediante estas operaciones tener escritos once números 10?

Aquí primero notamos que al hacer una posible operación, la suma total de los números puede cambiar de tres formas:

- Al sumarle a los dos números elegidos 1, se le suma 2 a la suma
- Al restarle a los dos números elegidos 1, se le resta 2 a la suma
- Al sumarle 1 a uno de los números y restarle 1 al otro, la suma se mantiene igual

Ahora observemos que la suma inicial de nuestros números es 11 (pues son 11 unos) y queremos que al final la suma de los números sea 110 (11 dieces). Pero al realizar cualquier operación la suma total debe de mantenerse o igual o sumar o restar dos. En cualquier caso se mantiene la paridad de la suma y por lo tanto, la suma siempre será impar, por lo cual la suma total de los números nunca podrá ser par.

También hay otras situaciones donde analizar la paridad es interesante o alguna propiedad similar a la paridad puede mantenerse. Esto es especialmente cierto o puede llegar a ser útil hacer coloraciones usando dos colores o algunas ideas misceláneas donde pueda aplicarse la paridad.

Problemas

Problema 8. Las 28 fichas de dominó están acomodadas en una cadena, de manera que el número de puntos en los extremos unidos de un par de fichas adyacentes coinciden. Si uno de los extremos de la cadena es un número 5, ¿cuál es el número en el otro extremo de la cadena?

Problema 9. Se escogen 45 puntos a lo largo de una línea AB, todos ellos fuera del segmento AB. Prueba que la suma de las distancias desde esos puntos al punto A no puede ser igual a la suma de las distancias desde esos puntos al punto B.

Problema 10. Si sabemos que el último dígito del número $9^n + 99^n + 999^n$ es 3, demuestra que n es par.

Problema 11. ¿Es posible dibujar 9 segmentos de línea de manera que cada segmento interseque a exactamente uno de los otros segmentos?

En un cuarto hay dos focos y dos apagadores. Al principio, los dos están apagados. Totoro juega con los apagadores oprimiendo en total 15 veces alguno de los apagadores. Cuando termina de jugar, ¿cuántos focos siguen apagados?

Problema 12. Tenemos los números del 1 al 2019, si en cada paso podemos cambiar dos números cualesquiera por su diferencia. Muestra que habrá un número par después de 2018 pasos.

Problema 13. A una cuadrícula de 8×8 se le retiran un par de esquinas opuestas. ¿Puede ser cubierta con 31 fichas de dominó (fichas de 2×1 cuadrillos).

Problema 14. Prueba que un polígono cerrado que no se interseca a si mismo y cuyos lados son verticales y horizontales, tiene un número par de lados.

Problema 15. Consideremos el siguiente tablero:

-1	1	1	1
1	1	1	1
1	-1	1	1
1	1	-1	1

Se permite cambiar de signo cualquier fila, columna o diagonal principal tantas veces como se quiera. ¿Puede conseguirse que todos los elementos acaben siendo positivos?

Problema 16.

Se tienen $2n$ ceros y $3n$ unos escritos en una hoja (sin ningún orden específico), y n es un entero positivo. Por un “reemplazo” se entenderá cualquiera de las dos siguientes operaciones: se eligen dos números, y

- Si los dos son iguales, se escribe en su lugar sólo un 0;
- Si los dos son diferentes, se escribe en su lugar sólo un 1.

Después de realizar $5n-1$ reemplazos no se pueden hacer más reemplazos pues queda sólo un número. ¿Qué número queda, un 1 o un 0? Justifica tu respuesta.

Fuentes:

Entrenamiento de invariantes 2013 OMMSLP, disponible en:

<https://onmapsguanajuato.files.wordpress.com/2011/10/invariantes2013-paridad.pdf>

Curso para entrenadores 2014 del Comité Nacional de la OMM, disponible en:

<http://www.ommenlinea.org/wp-content/uploads/practica/entrenador/CursoEntrenadores2014.pdf>

OMM de la Ciudad de México, Material del 12 de enero, proceso 2018-2019 para la OMMEB, disponible en:

<http://www.omdf.matem.unam.mx/preparate/entrenamientos-1>