Entrenamiento Geometría ORO
Israel Bonal Rodríguez
israel.bonal@cimat.mx
19 de Septiembre de 2020

Líneas de Simson, de Euler y Circunferencia de los nueve puntos

Teorema 1 (Línea de Simson): Sea P un punto sobre la circunferencia circunscrita a un triángulo. Entonces, los pies de las perpendiculares desde P hacia los lados del triángulo son colineales.

Lema 1 (H2O): Sea ABC un triángulo con circuncentro O y ortocentro H, y sea M el punto medio de BC. Entonces $AH = 2OM$.

Lema 2: Sea ABC un triángulo, G su gravicentro y M el punto medio de BC. Entonces G divide en razón $2:1$ al segmento AM, es decir $AG = 2GM$.

Teorema 2 (Línea de Euler): Sean H, G y O el ortocentro, gravicentro y circuncentro de un triángulo. Entonces H, G y O son colineales y se cumple que $HG : GO = 2 : 1$.

Teorema 3 (Circunferencia de los nueve puntos): Consideremos los siguientes 9 puntos: los pies de las alturas, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos que unen cada vértice con el ortocentro. Estos 9 puntos están sobre una misma circunferencia cuyo centro es el punto medio del segmento que une el circuncentro y el ortocentro, y su diámetro es igual al circunradio del triángulo.

Problemas

1. Demuestra que el ángulo comprendido entre las rectas de Simson que corresponden a dos puntos de una circunferencia, es equivalente a la mitad del arco entre estos puntos.

2. Sea P un punto sobre la circunferencia circunscrita alrededor de un triángulo ABC. La recta perpendicular a BC, la cual pasa por P, corta por segunda vez a la circunferencia en el punto M. Demuestra que la recta de Simson que corresponde al punto P, es paralela a la recta AM.

3. Demuestra que la proyección del lado AB de un triángulo ABC sobre la recta de Simson que corresponde a un punto P, es igual a la distancia entre las proyecciones del punto P sobre los lados AC y BC.

4. ¿Qué lados corta la recta de Euler en los triángulos acutángulo y obtusángulo?

5. Sea K un punto simétrico al circuncentro de un triángulo ABC, con respecto al lado BC. Demuestra que la línea de Euler en el triángulo ABC divide el segmento AK por la mitad.

Israel Bonal Rodríguez
israel.bonal@cimat.mx
19 de Septiembre de 2020

6. Sea P un punto interior a un triángulo acutángulo ABC, tal que los ángulos $\measuredangle APB = \measuredangle BPC = \measuredangle CPA = 120°$. Demuestra que las líneas de Euler en los triángulos APB, BPC y CPA se cortan en un punto.

7. Demuestra que la recta que une los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita de un triángulo dado, es la recta de Euler en el triángulo con vértices en los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados del triángulo.

8. Demuestra que las perpendiculares trazadas desde los puntos medios de los lados de un triángulo, sobre las tangentes al circuncírculo en el vértice opuesto respectivo, concurren en el centro de la Circunferencia de los Nueve Puntos del triángulo.

9. Sean H el ortocentro de un triángulo ABC, D el punto medio del lado BC y P uno de los puntos de intersección de la recta HD con el circuncírculo del triángulo ABC. Demuestra que D es el punto medio de HP.

10. En un triángulo ABC, sean BD la altura, BM la mediana, y P y Q las proyecciones de los puntos A y C sobre la bisectriz del ángulo $\measuredangle B$. Demuestra que los puntos D, M, P y Q están sobre una circunferencia cuyo centro está sobre la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC.