Entrenamiento de invarianza
Sebastian Sánchez Lara
sebastian.sanchez@cimat.mx
3 de Septiembre de 2020

1. Introduccion

El tema que veremos a continuacion, es una tecnica para resolucion de problemas, especialmente util en combinatoria, pero es aplicable en practicamente todas las ramas de las matematicas, e incluso fuera de ella. La manera mas sencilla de entender en que consiste la invarianza, es con un ejemplo

Ejemplo 1.1. *Se tiene un tablero de ajedres de* $8x7$*, con un caballo en la casilla* $(1,1)$*. Es posible llegar en una cantidad par de movimientos a la casilla* $(7,8)$*?*

Solución Notemos que el caballo de ajedrez, en un movimiento, cambia el color de la casilla en la que esta(blanco-¿negro y viceversa). Y las casillas $(1,1),(7,8)$ tienen colores diferentes. En una cantidad par de movimientos, como el color de la casilla en la que esta el caballo va cambiando con cada movimiento, sera del mismo color siempre. Por lo tanto despues de una cantidad par de movimientos, el caballo mantendra el color de la casilla en la que esta. Asi que no puede acabar en una casilla de color distinto.

Este ejemplo nos muestra la estrategia de la invarianza, que consiste en buscar cosas constantes, que no cambian sin importar que se haga, en este caso, que el caballo siempre debe terminar en el mismo color que en el que empezo. Esta propiedad constante, la llamaremos una invarianza, y existen algunas tecnicas comunes para descubrir estas caracterizticas. En la mayoria de los ejemplos que veremos descubrir la invarinza, sera la clave importante que resuelve el problema, pero muchas veces, puede ser que solo sea un componente del problema.

2. Coloración

La tecnica de coloracion, consiste en colorear de cierta manera el problema, especialmente en los problemas que tienen un tablero. La manera de colorear el tablero puede variar segun el problema y puede haber de distintas maneras.

Ejemplo 2.1. *Es posible cubrir un tablero de* $10x10$ *con piezas en forma de L sin que se traslapen ni salgan del tablero?*

Solución Coloreamos las columnas impares de negro, y las columnas pares de blanco. Veamos que cada ficha sin importar como se ponga(si se pone de manera valida) cubrira 3 casillas de un color, y 1 del otro color. Llamemosle ficha negra si cubre 3 casillas negras y 1 blanca, y ficha blanca si cubre 3 fichas blancas y 1 negra. Notemos que debe haber la misma cantidad de fichas negras y de fichas blancas. Entonces si hay n fichas blancas, habran en total $8n$ casillas cubiertas en total. Pero hay 100 casillas en total, que no es multiplo de 8, por lo tanto no se puede cubrir el tablero.

La coloracion se puede usar de muchas maneras, y encontrar la coloracion adecuada, y aplicarla de manera correcta, puede ser bastante complicado, asi que hacer muchos problemas, es muy importante para usarla de manera eficiente.

3. problemas

1. En un pizarron se han escrito los numeros del 1 al 100, y un movimiento consiste en borrar 2 numeros a, b del pizarron y escribir el numero $a + b$. Que numero quedara escrito al final?

2. sobre una mesa hay 11 vasos, 5 de ellos boca arriba, y 6 de ellos boca abajo. Un movimiento consiste en escoger 2 vasos cualquiera y voltearlos. Es posible dejar todos los vazos boca arriba? y boca abajo?

3. Hay una escalera de 10 escalones, y en cada uno de los escalones hay una rana. Cuando una rana baja un escalon, hay exactamente otra que sube, y viceversa(las ranas solo pueden moverse en parejas). Es posible que las 10 ranas terminenen en un mismo escalon?

4. en la isla de los camaleones, hay 13 camaleones amarillos, 15 verdes, y 17 rojos. Cuando dos camaleones de diferente color se encuentran, automaticamente cambian al tercer color. Es posible que en algun momento todos los camaleones sean del mismo color?

5. probar que un tablero de 10x10, no se puede cubrir con fichas de 1x4.

6. Dado cualquier conjunto de 9 puntos en el plano de los cuales no hay tres colineales, demuestre que para cada punto P del conjunto, el número de triángulos que tienen como vértices a tres de los ocho puntos restantes y a P en su interior, es par.

7. En un tablero de mxn un camino es una sucesion de casillas de tal manera que dos casillas consecutivas comparten un lado. Demuestra que existe un camino que empieza y termina en la misma casilla, y pasa por todas las demas casillas exactamente una vez si y solo si alguno de los numeros m o n es par y ambos son mayores o iguales a 2

8. En un tablero de 8x8 hay un foco en cada casilla. Inicialmente todos los focos estan apagados. Un movimiento consiste en elegir un foco y una direccion (vertical o horizontal) y cambiar el estado de ese foco y todos sus vecinos en esa direccion. Despues de cierta cantidad de movimientos, queda exactamente un foco prendido. Encuentra todas las posibles posiciones de ese foco.

9. Se tiene un tablero de 1001x1001. Se quieren colorear algunas casillas de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones:

   - Si 2 casillas comparten un lado, entonces al menos una de las dos esta coloreada.
   - Si 6 casillas son consecutivas (horizontal o verticalmente), entonces entre ellas hay al menos dos casillas consecutivas coloreadas.

   Encuentra el mínimo numero de casillas que se deben colorear para satisfacer estas dos condiciones.

10. se tiene un 99-énagono regular cuyos lados estan pintados de rojo, azul o amarillo. Inicialmente se pinta cada lado del póligono de la siguiente maners: rojo, azul,rojo, azul,..., rojo, azul, amarillo. En un paso se permite cambiar el color de un lado del poligono a otro, de manera que no haya 2 lados adyacentes que tengan el mismo color. Es posible llegar a una coloracion de rojo,azul,rojo,azul,..., rojo, amarillo, azul en una cantidad finita de pasos?(notese que las dos coloraciones estan dadas en el mismo sentido, pero no necesariamente en los mismos lados).

11. En un tablero de nxn se pintan las casillas de blanco o de negro. 3 de las esquinas estan pintadas de bkanco y 1 esta pintada de nergro. Demuestra que hay un cuadrado de 2x2 con una cantidad impar de casillas blancas.

12. Se tiene un torneo de tenis de n jugadores, de manera que cualesquiera dos juegan entre si. Se sabe que no hay empate. Si P_i es la cantidad de partidas que perdio el jugador i, y G_i es la cantidad de partidas que gano el jugador i. Demuestra que $P_1^1 + P_2^2 + ... + P_n^2 = G_1^1 + G_2^2 + ... + G_n^2$