Primer Entrenamiento Álgebra
Rubén Pérez Palacios
29 de Agosto de 2020

1. Introducción

Estaremos trabajando con los números reales. Recordemos que los naturales, enteros y los racionales son todos números reales.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Los números reales cumplen las siguientes propiedades. Consideramos a, b, c numeros reales cualesquiera

1. El número 0 cumple que $a = a + 0 = 0 + a$
2. Para cada número a real existe un número $(-a)$ y cumple $0 = a + (-a) = (-a) + a$
3. La suma es asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. La suma es conmutativa $a + b = b + a$
5. El número 1 cumple que $a = a \cdot 1 = 1 \cdot a$
6. Para cada número a real distinto de 0, existe un número a^{-1} y cumple $1 = a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a$
7. El producto es asociativa: $(ab)c = a(bc)$
8. El producto es conmutativo $ab = ba$
9. La suma distribuye el producto, es decir $(a + b)c = ac + bc$

2. Definiciones

2.1. Función

Es una relación entre dos conjuntos, digamos A y B, de los que a cada elemento de A se le asigna un único elemento de B. Su notación es la siguiente

Primero se indica sobre que conjuntos A y B esta definida

$$f : A \to B$$

Después se indica la regla de relación, es decir

$$x \in A, f(x) = \cdots$$

Una función puede ser inyectiva, suprayectiva, y biyectiva.

Una función inyectiva es aquella a la que a cada elemento de A le asigna un elemnto diferente de B, es decir no existen $a_1, a_2 \in A$ tales que

$$f(a_1) = f(a_2).$$

Una función suprayectiva es aquella a que cada elemento de B le corresponde uno de A, es decir para cada $b \in B$ existe un $a \in A$ tal que

$$f(a) = b.$$

2.2. Polinomio

Un polinomio $P(x)$ en una variable x es una expresión de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

con $a_0, \cdots, a_N$ constantes y $n \in \mathbb{N}$. A cada sumando le llamaremos monomio o sumando. Las constantes a_i se conocen como coeficientes del polinomio. Si $a_n \neq 0$, y entonces el término $a_n x^n$ es un termino muy importante ya que nos define el grado del polinomio. El número a_0 se le conoce como término constante. Si $a_n = 1$ se le llama mónico al polinomio.

3. Productos Notables y Factorización

3.1. Factorización

Es un metodo por el cual buscamos reexpresar una ecuación, polinomio, función... en forma de producto de ecuaciones, polinomios, funciones... Esto es de mucha ayuda para poder trbajar de manera mas simple con ellas, puesto que puedes empezar a dividir el problema en problemas mas chiquitos.

3.2. Productos notables

Son los casos más basicos de la factorización de un polinomio

Proposición 3.1 (Binomio al cuadrado)**.** *Cuando $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que*

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

Proposición 3.2 (Diferencia de cuadrados)**.** *Cuando $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que*

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Proposición 3.3 (Producto de binomios con un termino en común)**.** *Cuando $a, b, x \in \mathbb{R}$, se cumple que*

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab,$$

Proposición 3.4 (Binomio al cuadrado)**.** *Cuando $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se cumple que*

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd,$$

Proposición 3.5 (Binomio al cubo)**.** *Cuando $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que*

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

Proposición 3.6 (Diferencia y suma de cubos)**.** *Cuando $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que*

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3,$$
$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3,$$

Ver como es el caso general para suma de potencias pares y difernecia de potencias.

3.3. Ejercicios

Ejercicio 3.7. *Para cualesquiera x, y reales, demuestra que*

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy).$$

Ejercicio 3.8. *Demuestra que*

$$\frac{(a-b)^2}{8a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{8b}$$

para todo $a \geq b > 0$.

Ejercicio 3.9. *Sean a, b y c disntitos número reales, diferentes de 0, tales que*

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}.$$

Demuestra que $|abc| = 1$.

Ejercicio 3.10. *Demuestra que $n^4 - 22n^2 + 9$ es un número compuesto (no primo) para cualquier entero n.*

Ejercicio 3.11. *Encuentra todas las parejas (m, n) de números enteros positivos tales que*

$$|3^m - 2^n| = 1.$$

4. Exponentes

4.1. Definición

Definición 4.1 (Los exponentes). *Cuando a es un número real y n es un entero positivo*

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n} =$$

Definición 4.2 (El inverso). *Cuando $a \neq 0$ es un real,*

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Definición 4.3 (Los exponentes negativos). *Cuando a es un número real y n es un entero positivo*

$$a^{-n} = \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a \cdots a^{-1}}_{n} = \frac{1}{a^n}$$

Definición 4.4 (Los radicales). *Cuando a es un número real mayor o igual a cero y n es un entero positivo. Entonces*

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} = b$$

Es el único número real mayor o igual a cero tal que $b^n = a$

Observación 4.5 (Notación). *Cuando $n = 2$, se puede omitir la n, es decir, $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$.*

Observación 4.6. *no se confunda con calcular las soluciones de polinomios. Por ejemplo $x^2 - 4 = 0$ tiene las soluciones $r_1 = \sqrt{4} = 2$ y $r_2 = -\sqrt{4} = -2$. Ambos números r_i cumplen que $r^2 = 4$, pero el radical es una función que nos da la raíz positiva (o principal).*

4.2. Leyes

Proposición 4.7. *Sea a un número real y m, n enteros, entonces*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Proposición 4.8. *Sea a un número real y m, n enteros, entonces*

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Proposición 4.9. *Sean a, b números reales y n entero, entonces*

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$2^{3^{4^5}} = 2^{\left(3^{\left(4^{(5)}\right)}\right)}$$

4.3. Ejercicios

Ejercicio 4.10. *Sea a un número real, simplifica la siguiente expresión*

$$\left[\left(8a^6\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{\left(a^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^{-1}$$

Ejercicio 4.11. *Encuentra todos los números reales x tales que*

$$\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{7}{6}.$$

Ejercicio 4.12. *Encuentra todos los números reales x tales que*

$$10^x + 11^x + 12^x = 13^x + 14^x.$$

4.4. Desigualdades

4.4.1. Desigualdades famosas y útiles

Teorema 4.13 (Desigualdad del triángulo)**.** *Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ se cumple que*

$$x + y < z, \quad x + z < y, \quad y + z < x$$

Teorema 4.14 (Medias)**.** 1. *Aritmética (MA):*

Sean $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, entonces

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

2. *Geométrica (MG):*

Sean $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, entonces

$$\sqrt[n]{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}.$$

3. *Armónica (MH):*

Sean $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, entonces

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

4. Cuadrática (MC):

Sean $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$*, entonces*

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Y la relación entre ellas es:

$$MH \leq MG \leq MA \leq MC$$

Teorema 4.15 (Reacomodo)**.** *Sean* $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$*, tales que*

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \quad y \quad b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n.$$

Para cualquier permutación $(a_1', a_2', \cdots, a_n')$ *de* $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ *se tiene que*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i' b_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_{n+1-i} b_i.$$

Teorema 4.16 (Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz)**.** *Sean* $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n \in \mathbb{R}$*, entonces*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

Teorema 4.17 (Tchebyshev)**.** *Sean* $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$*, entonces*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{n} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n}$$

Teorema 4.18 (Útil)**.** *Sean* $x_1, x_2, \cdots, x_n, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$*, entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{x_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

4.5. Ejercicios

Ejercicio 4.19. *Seab* a, b, c *números reales. Demuestra que*

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2.$$

Ejercicio 4.20. *Sean* $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ *con* $ab + bc + cd + da = 1$*, demuestra que*

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}.$$

Ejercicio 4.21. *Sean a, b, c números reales. Demuestra que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

5. Funciones útiles

Proposición 5.1 (Valor absoluto)**.** *Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces*

$$|x| = \begin{cases} x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x > 0 \end{cases}$$

Proposición 5.2 (Parte piso)**.** *Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\lfloor x \rfloor = max \left\{ m \in \mathbb{Z} | m \leq x \right\}.$$

Proposición 5.3 (Parte techo)**.** *Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\lceil x \rceil = min \left\{ n \in \mathbb{Z} | n \geq x \right\}.$$

Proposición 5.4 (Parte fraccionaria)**.** *Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor.$$