Geometría Euclidiana

Berta Gamboa de Buen

Contenido

Capítulo 1

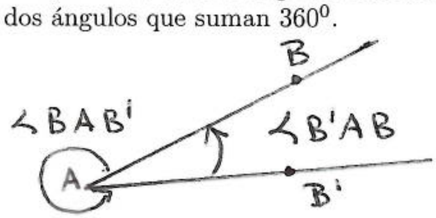
Geometría Euclidiana

1.1 Notación

La notación que usaremos en estas notas será la siguiente.

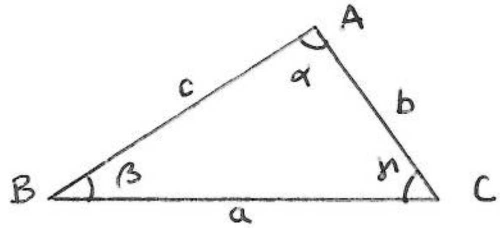
Por dos puntos A, B pasa una línea recta; AB denotará indistintamente la recta que pasa por A y B o el segmento de recta comprendido entre A y B, quedando claro en el contexto. También denotaremos a las rectas y los segmentos por letras minúsculas como l,l' y a, b, c, respectivamente. Los segmentos no son dirigidos así que son el mismo el AB y el BA y para no complicar la notación la longitud del segmento estará denotada también por AB o a.

Un ángulo está determinado por dos segmentos de recta que tienen un extremo común y en este caso sí importa el orden pues dos segmentos nos determinan dos ángulos que suman 360^0.



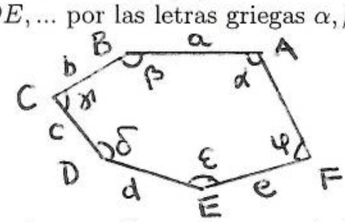
Así por $\prec BAB'$ denotaremos al ángulo entre los segmentos de recta AB y AB' y por $\prec B'AB$ denotaremos al ángulo entre los segmentos de recta AB' y AB. Notemos que los ángulos están dirigidos en el sentido contrario de las manecillas del reloj. Los ángulos también los denotaremos por letras griegas minúsculas.

Tres puntos A, B y C determinan tres segmentos de recta AB, BC y CA y tres ángulos $\prec ABC, \prec BCA$ y $\prec CAB$, es decir los tres puntos determinan un triángulo que llamaremos triángulo ABC. Los puntos A, B y C son los vértices del triángulo y denotaremos los lados AB, BC y CA por las letras minúsculas c, a y b respectivamente y los ángulos $\prec ABC, \prec BCA$ y $\prec CAB$ por las letras griegas β, γ y α, respectivamente.



Las alturas de un triángulo son los segmentos de recta que van de los vértices al lado opuesto y son perpendiculares éste. El área de un triángulo es la mitad del producto de un lado por la altura sobre dicho lado.

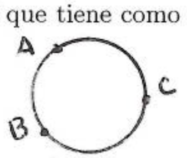
Un polígono de ene lados está determinado por ene puntos $A, B, C, D, E, \ldots,$ llamados vértices del polígono, pues determinan ene segmentos de recta $AB, BC, CD, DE, \ldots,$ y ene ángulos $\prec ABC, \prec BCD, \prec CDE, \ldots$ Denotaremos al polígono por P o por $ABCDE\ldots$. a los lados por $AB, BC, CD, \ldots$ o por las letras minúsculas $a, b, c, d, \ldots$ respectivamente y los ángulos $\prec ABC$, $\prec BCD$, $\prec CDE, \ldots$ por las letras griegas $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ respectivamente.



El segmento CF
es un diámetro

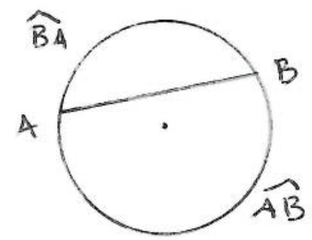
Un diámetro de un polígono P es uno de los segmentos de mayor magnitud determinados por dos puntos en su perímetro. Por ejemplos las diagonales de un cuadrado o de un rectángulo son diámetros.

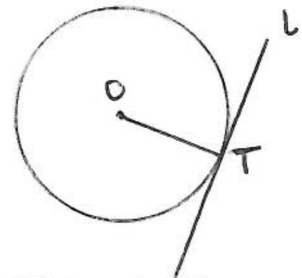
Tres puntos no colineales definen un círculo, el círculo circunscrito al triángulo que tiene como vértices dichos puntos.



Una cuerda es un segmento de recta cuyos extremos están sobre el círculo. Un diámetro es una cuerda que pasa por el centro del círculo.

Si $\mathcal{C}$ es un círculo con centro en O y A y B son dos puntos en $\mathcal{C}$, estos puntos nos determinan la cuerda AB y dos arcos en el círculo $\mathcal{C}$, que denotaremos por $\widehat{AB}$ y $\widehat{BA}$.





Una recta l es tangente a un círculo $\mathcal{C}$ si l intersecta a $\mathcal{C}$ en uno y sólo un punto. Si l es tangente en T al círculo $\mathcal{C}$ con centro en O, entonces OT es perpendicular a l.

1.1.1 Ejercicios

1. Dibuje los diámetros de los diferentes tipos de triángulos.
2. Dibuje los diámetros de un rombo y un romboide.
3. Dibuje los diámetros de un trapecio y un trapezoide.
4. Dibuje varios polígonos con diferentes lados y sus diámetros

1.2 Razón de partición de un segmento de línea

Si P es un punto cualquiera en la línea AB, con A y B distintos, ya sea entre A y B o externo al segmento AB, se dice que divide al segmento AB en la razón $\frac{AP}{PB}$. Cuando P está entre A y B divide al segmento internamente y la razón de partición es positiva; si está fuera del segmento AB divide al segmento externamente y la razón es negativa.

Cuando cuatro puntos A, B, C y D están situados de tal manera que C y D dividen a AB interna y externamente con razones numéricamente iguales, es decir si

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB},$$

entonces decimos que C y D dividen al segmento AB interna y externamente en la misma razón.

Lema 1.1 *Si dos puntos dividen a un segmento de línea en razones iguales, los dos puntos coinciden.*

Demostración: Sean AB el segmento de línea y P y Q dos puntos en la recta determinada por AB, tales que $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$, es decir

$$\frac{AP \cdot QB}{PB} = AQ. \tag{1.1}$$

Supongamos que los puntos se encuentran ubicados como en la siguiente figura.

Entonces $PQ = PB - QB$ y

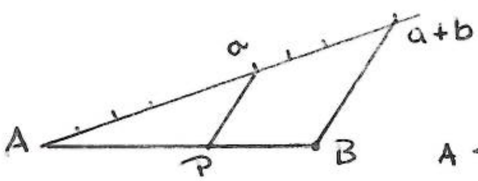
$$\begin{aligned} PQ &= AQ - AP = \frac{AP \cdot QB}{PB} - AP = AP\left(\frac{QB}{PB} - 1\right) = \\ &= \frac{AP}{PB}(QB - PB) = \frac{AP}{PB}(-PQ), \end{aligned}$$

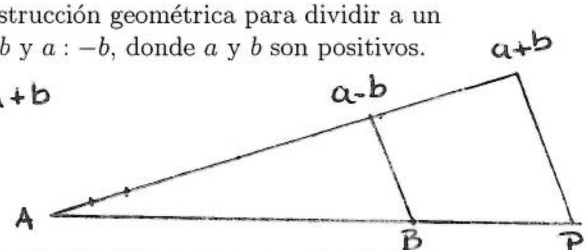
de donde

$$0 = PQ + PQ\frac{AP}{PB} = PQ\left(1 + \frac{AP}{PB}\right)$$

y como $1 + \frac{AP}{PB} \neq 0$, tenemos que $PQ = 0$, es decir $P = Q$.

A continuación daremos una construcción geométrica para dividir a un segmento de línea en las razones $a : b$ y $a : -b$, donde a y b son positivos.





Sea AB el segmento que queremos dividir. Trazamos una recta distinta de AB y que pase por A. Con la misma abertura de un compás trazamos $a + b$ segmentos a partir de A, en la dirección de B.

Para dividir el segmento en la razón $a : b$, trazamos la recta l que pasa por el extremo final del último de los segmentos y por B. Por el extremo del segmento $a-$*ésimo* trazamos una recta paralela a l; el punto de intersección de dicha recta con el segmento AB, es el punto buscado.

Para dividir el segmento en la razón $a : -b$, si $a > b$ trazamos la recta l que pasa por el $a - b -$ *ésimo* segmento y por B. Por el extremo final del último de los segmentos, es decir el $a + b - \acute{e}simo$, trazamos una recta paralela a l; como en el caso anterior el punto deseado es el punto de intersección de dicha recta con el segmento AB. Se deja como ejercicio el caso restante.

1.2.1 Ejercicios

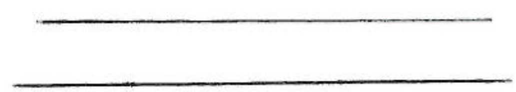
1. Pruebe el lema1.1 cuando los puntos P y Q están fuera del segmento AB. ¿Puede haber algún otro caso?

2. Si la longitud de AB es de 10 unidades, dibuje los puntos que dividen al segmento en las razones 3:1, 3:-1, 2:1, 2:-1, 5:3 y 5:-3.

3. Construya geométricamente el punto P que divide al segmento AB en la razón $a : -b$, donde a, b son positivos y $a < b$.

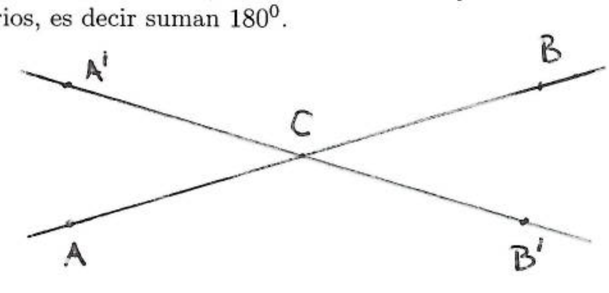
1.3 Rectas y Angulos

Dos rectas que nunca se cortan son paralelas, es decir dos rectas paralelas están separadas una distancia constante.

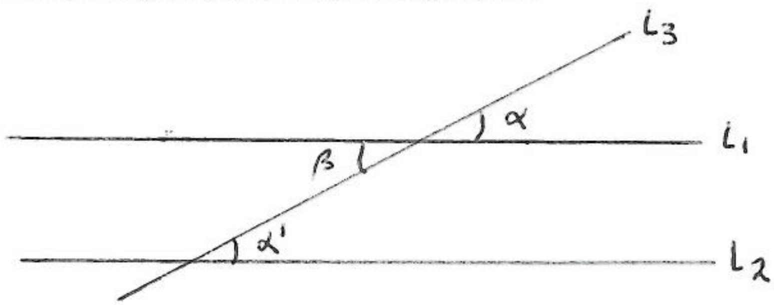


Recordemos las siguientes propiedades elementales sobre rectas y ángulos.

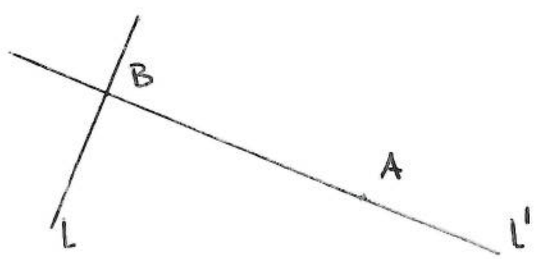
P1 Si dos rectas AB y $A'B'$ se cortan en un punto C entonces los ángulos $\prec A'CA$ y $\prec B'CB$ son iguales y los ángulos $\prec ACB'$ y $\prec BCA'$ también son iguales (son ángulos opuestos por el vértice) y tanto los ángulos
$\prec A'CA$ y $\prec BCA'$, como los $\prec BCA'$ y $\prec B'CB$ son suplementarios, es decir suman 180^0.



P2 Si l_1 y l_2 son dos rectas paralelas y l_3 es una línea transversal, los ángulos correspondientes α y α' son iguales, también son iguales los ángulos alternantes β y α'. Recíprocamente si una transversal corta dos líneas de tal manera que los ángulos correspondientes o los alternantes son iguales, las dos líneas son paralelas.



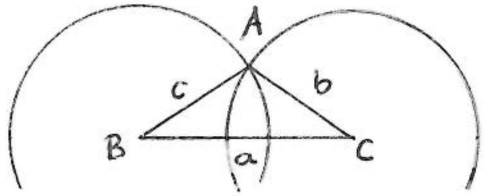
P3 Para encontrar la distancia de un punto A a una recta l tracemos la perpendicular l' a l que pasa por A y sea B la intersección de l y l'. La distancia de A a l es la longitud del segmento AB.



1.4 Triángulos

Hemos dicho que tres segmentos nos determinan un triángulo, veamos como lo podemos construir.

Construcción de un triángulo dado sus tres lados. Si a, b y c son los tres lados de un triángulo, para construirlo tomamos el segmento a y denotamos sus extremos por B y C. Con centro en B y radio c trazamos un círculo y con centro en C y radio b trazamos otro círculo. Si A es uno de los puntos de intersección de los dos círculos trazados, entonces ABC es el triángulo deseado.



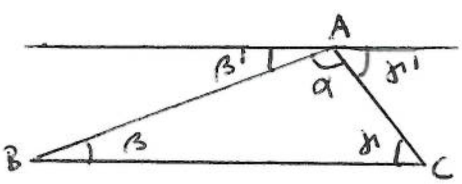
Si los círculos son tangentes se trata de un triángulo degenerado en una línea pues el punto de tangencia está sobre el segmento que une sus centros, a saber sobre a. Si los círculos no se intersectan entonces no se puede construir un triángulo que tenga esos lados.

Hemos obtenido entonces la siguiente proposición.

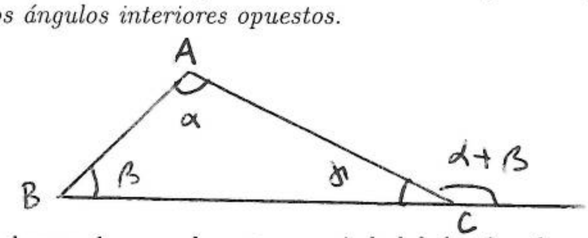
Proposición 1.2 *En un triángulo la suma de las longitudes de dos de sus lados es mayor que la longitud del lado restante.*

Proposición 1.3 *La suma de los ángulos interiores en un triángulo cualquiera es igual a 180^0.*

Demostración: Sea el triángulo ABC. Por A trazamos la paralela a BC, entonces los ángulos β y β' son iguales y los ángulos γ y γ' son iguales por ser ángulos alternos y claramente $\beta' + \alpha + \gamma' = 180^0$.



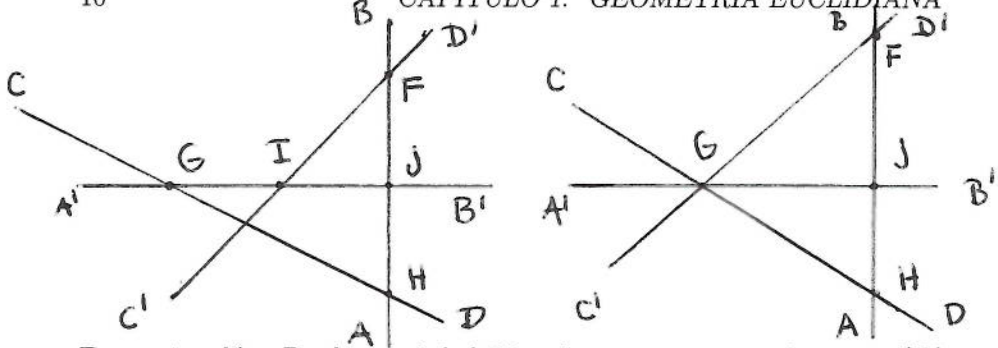
Corolario 1.4 *Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos.*



Podemos ahora probar otra propiedad de los ángulos entre ciertas rectas.

Proposición 1.5 *Sean AB y $A'B'$ dos rectas perpendiculares entre sí y CD y $C'D'$ otro par de rectas perpendiculares entre sí. Si F, G, H e I son los puntos de intersección de las rectas AB con $C'D'$, $A'B'$ con CD, AB con CD y $A'B'$ con $C'D'$ respectivamente, entonces*

$$\prec C'FA = \prec CGA' \text{ y } \prec BHC = \prec A'IC'.$$



Demostración: Por la propiedad P2 podemos suponer que la recta $A'B'$ pasa el punto de intersección de las rectas CD y $C'D'$ y entonces G e I coinciden con ese punto. Como las rectas CD y $C'D'$ son perpendiculares entre sí, de

$$\prec CGA' + \prec D'GC + \prec B'GF = 180^0$$

obtenemos que

$$\prec CGA' = 90^0 - \prec B'GD'. \tag{1.2}$$

Por otra parte si J es la intersección de las rectas AB y $A'B'$, del triángulo FGJ

$$\prec C'FA + \prec FJA' + \prec B'GF = 180^0$$

y usando que las rectas CD y $C'D'$ son perpendiculares entre sí deducimos

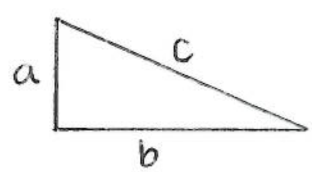
$$\prec C'FA = 90^0 - \prec B'GF. \tag{1.3}$$

La primera igualdad que queremos probar es consecuencia de (1.2) y (1.3) y la otra se prueba de manera análoga.

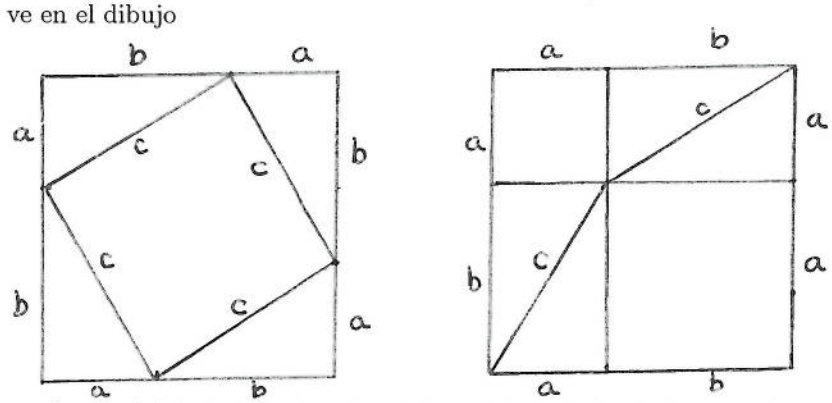
Recordemos que un triángulo es equilátero si sus tres lados son iguales, isósceles si dos de sus lados son iguales y rectángulo si uno de sus ángulos es recto, es decir de 90^0. En un triángulo rectángulo, los lados adyacentes al ángulo recto se llaman catetos y el lado opuesto hipotenusa.

Uno de los teoremas más conocidos e importantes sobre triángulos es

Teorema 1.6 (de Pitágoras) *En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*



Demostración: Sea ABC un triángulo rectángulo con hipotenusa c y catetos a y b. Tenemos que probar que $c^2 = a^2 + b^2$.Como el cuadrado de un segmento representa el área del cuadrado de lado el segmento, debemos probar que el área del cuadrado de lado c es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lados a y b. Para ello denotemos por $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ las áreas de los cuadrados de lado a, b y c respectivamente y por $\mathcal{T}$ el área del triángulo ABC y construimos dos cuadrados de lado $a + b$ y los dividimos como se ve en el dibujo



Según el dibujo de la derecha el área del cuadrado de lado $a+b$ es igual a $4\mathcal{T} + \mathcal{C}$ y según el dibujo de la izquierda es igual a $4\mathcal{T} + \mathcal{A} + \mathcal{B}$. Por lo tanto $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{C}$ y esto prueba el teorema.

El recíproco del teorema de Pitágoras es cierto.

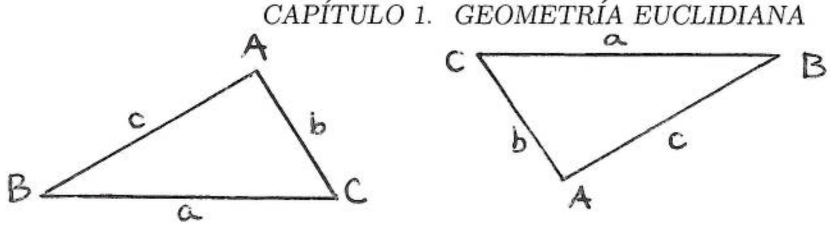
Proposición 1.7 *Si en un triángulo con lados a, b, c se tiene que $a^2+b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo.*

Demostración: Construimos un triángulo rectángulo con catetos a y b y con hipotenusa c'. Entonces por el teorema de Pitágoras $(c')^2 = a^2+b^2 = c^2$ y por lo tanto los dos triángulos son iguales, según la proposición siguiente.

Dos triángulos son iguales o congruentes si podemos superponer uno sobre el otro, es decir si se puede establecer una correspondencia entre sus vértices de tal forma que sus lados correspondientes y sus ángulos correspondientes son iguales.

Para ver que dos triángulos son iguales no necesitamos comprobar la igualdad de los tres lados y los tres ángulos.

Proposición 1.8 *Dos triángulos con lados iguales son triángulos iguales.*



Demostración: Sean a, b, c y a', b' y c' los lados de los dos triángulos con $a = a'$, $b = b'$ y $c = c'$ y A, B, C y A', B', C' los vértices. Trasladamos el triángulo primo de tal manera que a' quede sobre a, como $b = b'$, entonces A' está en el círculo con centro en $C = C'$ y radio b y como $c = c'$, A' está en el círculo con centro en $B = B'$ y radio c y entonces $A = A'$.

Existen otros criterios para la igualdad de triángulos, pero los obtendremos en la siguiente sección como consecuencia de los criterios para que dos triángulos sean semejantes.

1.5 Semejanza

Cuando hacemos planos de una casa o ciudad, queremos un dibujo que conserve la "forma" y las "proporciones" de la casa o la ciudad respectivamente, pero que sea de otro tamaño, es decir el plano es "semejante" a la casa o la ciudad .

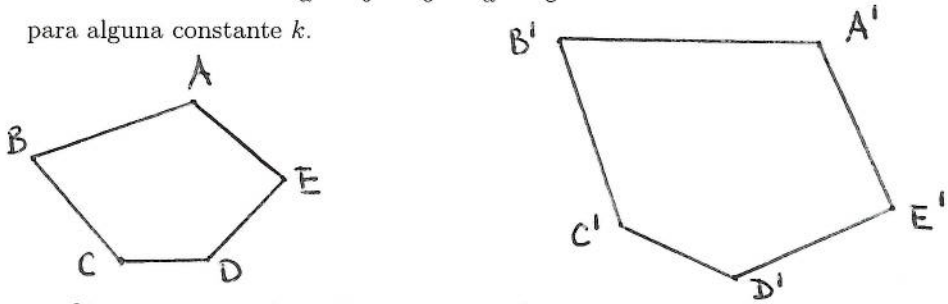
Diremos que dos polígonos son semejantes si tienen la misma "forma" y "proporciones", formalmente:

Dos polígonos con el mismo número de lados son semejantes si hay una correspondencia entre sus vértices tal que los lados correspondientes son proporcionales y los ángulos correspondientes son iguales.

Es decir, el polígono $ABCDE$ con lados a, b, c, d y e es semejante al polígono $A'B'C'D'E'$ con lados a', b', c', d' y e' si sus ángulos correspondientes son iguales y

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'} = k$$

para alguna constante k.



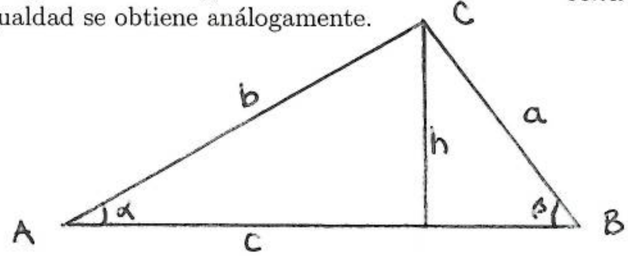
Observemos que dos polígonos son iguales si son semejantes con $k = 1$.

Para ver algunos criterios para la semejanza de triángulos necesitamos recordar las leyes de los senos y de los cosenos.

Proposición 1.9 (Ley de los senos) *Sea ABC un triángulo con lados* $a, b,$ c *y ángulos opuestos* α, β *y* γ *respectivamente. Entonces*

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}.$$

Demostración: Si D es el pie de la altura h sobre el lado c, entonces los triángulos ADC y BDC son rectángulos y tenemos que $sen\alpha = \frac{h}{b}$ y $sen\beta = \frac{h}{a}$, despejando $\frac{1}{h}$ e igualando obtenemos que $\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta}$. La otra igualdad se obtiene análogamente.

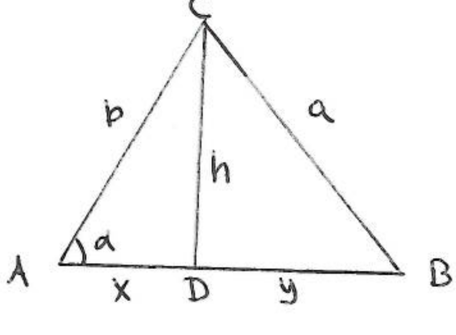


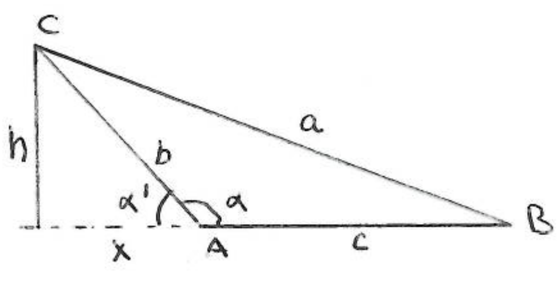
Proposición 1.10 (Ley de los cosenos) *Sea ABC un triángulo con lados* a, b, c *y ángulos opuestos* α, β *y* γ *respectivamente. Entonces*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Demostración: Si $\alpha \leq 90^0$, D es el pie de la altura h sobre el lado c, $x = AD$ y $y = DB$, como los triángulos ADC y BDC son rectángulos, entonces $x = b\cos\alpha$, $h = bsen\alpha$ y por el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + y^2 = h^2 + (c-x)^2 = h^2 + c^2 - 2cx + x^2 = \\ &= b^2 sen^2\alpha + c^2 - 2cb\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \end{aligned}$$





Si $\alpha > 90^0$, D es el pie de la altura h sobre el lado c, $x = AD$ y $\alpha' = 180^0 - \alpha$, entonces $x = b\cos\alpha'$, $h = bsen\alpha'$ y como $\cos\alpha = -\cos\alpha'$, usando nuevamente el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned}
a^2 &= h^2 + (c+x)^2 = h^2 + c^2 + 2cx + x^2 = \\
&= b^2 sen^2\alpha' + c^2 + 2cb\cos\alpha' + b^2\cos^2\alpha' = \\
&= b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha' = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Proposición 1.11 *Dos triángulos son semejantes si dos de sus ángulos correspondientes son iguales.*

Veremos dos demostraciones de este resultado, la primera usando trigonometría (ley de los senos).

Demostración: Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos tales que $\alpha = \alpha'$ y $\beta = \beta'$. Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es de 180^0 tenemos que también $\gamma = \gamma'$.

La ley de los senos aplicada a los dos triángulos nos da

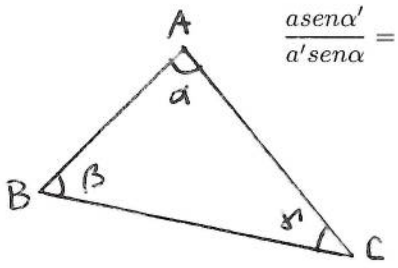
$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$$

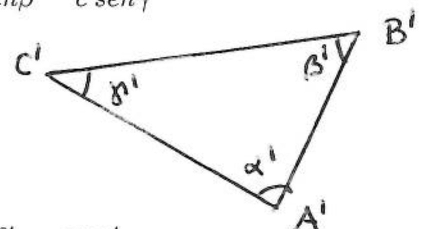
y

$$\frac{a'}{sen\alpha'} = \frac{b'}{sen\beta'} = \frac{c'}{sen\gamma'}$$

y dividiendo la primera serie de igualdades sobre la segunda obtenemos

$$\frac{asen\alpha'}{a'sen\alpha} = \frac{bsen\beta'}{b'sen\beta} = \frac{csen\gamma'}{c'sen\gamma}.$$





Como por hipótesis $\dfrac{sen\alpha'}{sen\alpha} = \dfrac{sen\beta'}{sen\beta} = \dfrac{sen\gamma'}{sen\gamma} = 1$, tenemos que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

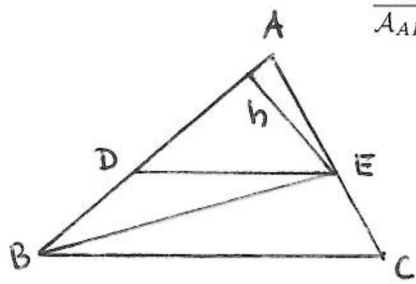
igual a alguna constante, que es lo que queríamos probar.

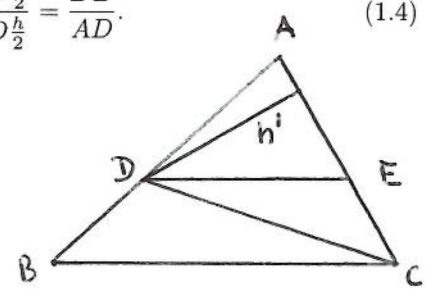
La segunda demostración usa el hecho de que el área de un triángulo es el producto de la base por la altura sobre dos y requiere del siguiente lema. Denotaremos por $\mathcal{A}_{ABC}$ el área del triángulo ABC.

Lema 1.12 *Sean ABC un triángulo y D y E puntos en los segmentos AB y AC respectivamente, de manera que las líneas que pasan por BC y DE sean paralelas. Entonces $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$. Recíprocamente si D y E son puntos en los lados AB y AC de un triángulo ABC tales que $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$, entonces las líneas BC y DE son paralelas.*

Demostración: Sean ABC un triángulo y D y E puntos cualesquiera en los segmentos AB y AC respectivamente. Como los triángulos ADE y DEB tienen la misma altura h desde E, entonces

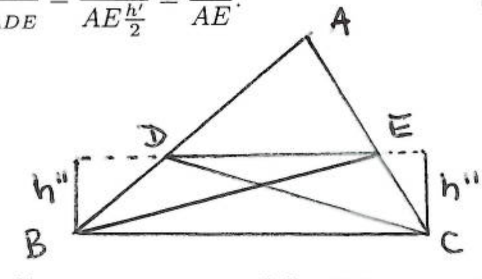
$$\frac{\mathcal{A}_{DEB}}{\mathcal{A}_{ADE}} = \frac{DB\frac{h}{2}}{AD\frac{h}{2}} = \frac{DB}{AD}. \tag{1.4}$$





Como los triángulos ADE y DEC tienen la misma altura h' desde D, entonces

$$\frac{\mathcal{A}_{DEC}}{\mathcal{A}_{ADE}} = \frac{EC\frac{h'}{2}}{AE\frac{h'}{2}} = \frac{EC}{AE}. \tag{1.5}$$



Supongamos ahora que las líneas que pasan por BC y DE son paralelas. Entonces los triángulos DEC y DEB tienen a DE como base común y la misma altura h'' sobre B y C respectivamente y entonces

$$\mathcal{A}_{DEC} = \mathcal{A}_{DEB}. \tag{1.6}$$

Finalmente de (1.4), (1.5) y (1.6), obtenemos

$$\frac{DB}{AD} = \frac{\mathcal{A}_{DEB}}{\mathcal{A}_{ADE}} = \frac{\mathcal{A}_{DEC}}{\mathcal{A}_{ADE}} = \frac{EC}{AC}.$$

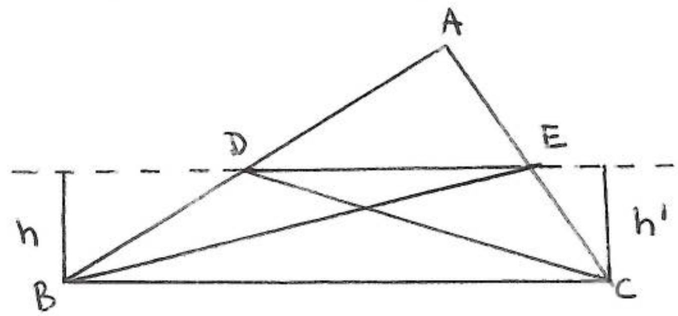
Supongamos ahora que los puntos D y E satisfacen $\dfrac{DB}{AD} = \dfrac{EC}{AE}$. De (1.4) y (1.5) obtenemos entonces que $\dfrac{\mathcal{A}_{DEB}}{\mathcal{A}_{ADE}} = \dfrac{\mathcal{A}_{DEC}}{\mathcal{A}_{ADE}}$, es decir

$$\mathcal{A}_{DEB} = \mathcal{A}_{DEC}$$

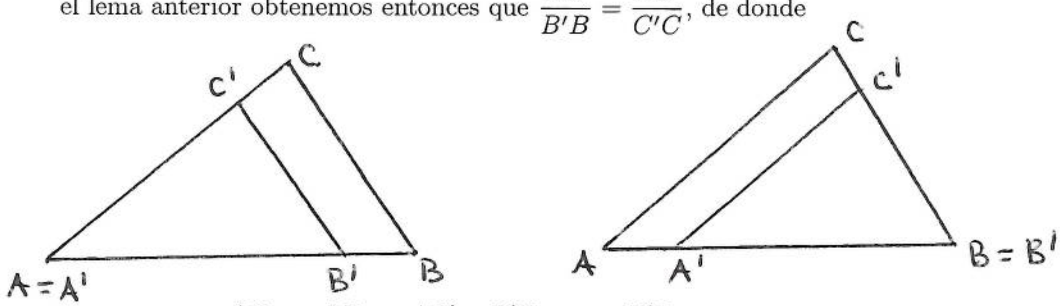
Si h es la altura del triángulo DEB y h' es la altura del triángulo DEC, entonces

$$\frac{ED \cdot h}{2} = \mathcal{A}_{DEB} = \mathcal{A}_{DEC} = \frac{ED \cdot h'}{2},$$

de donde $h = h'$ y las líneas ED y BC son paralelas.



Ahora sí podemos dar la otra demostración de la proposición 1.11.
Demostración: Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos con dos ángulos correspondientes iguales. Por lo tanto tienen los tres ángulos correspondientes iguales y si encimamos A y A' y ponemos a B' sobre la línea AB, entonces C' quedará sobre la línea AC y las líneas BC y $B'C'$ serán paralelas. Por el lema anterior obtenemos entonces que $\dfrac{AB'}{B'B} = \dfrac{AC'}{C'C}$, de donde



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AB}{AB'} = \frac{AB' + B'B}{AB'} = 1 + \frac{B'B}{AB'} =$$
$$= 1 + \frac{C'C}{AC'} = \frac{AC' + C'C}{AC'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Si ahora encimamos los vértices B y B' obtenemos análogamente que

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{BA}{B'A'}.$$

Esto termina la prueba de la proposición.

Corolario 1.13 *Si dos triángulos tienen dos ángulos y un lado respectivos iguales, entonces son congruentes.*

Demostración: Sean a y a' los lados iguales, entonces en la proposición anterior se obtiene $\dfrac{a}{a'} = 1$.

Proposición 1.14 *Dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales.*

Demostración: Sean ABC y $A'B'C'$ tales que $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = k$.

De la ley de los cosenos aplicada a cada triángulo obtenemos

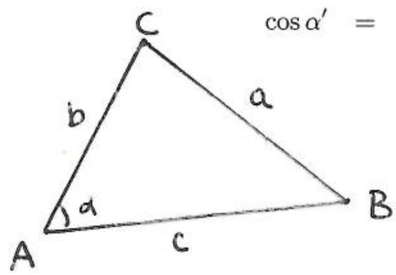
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ \text{y } (a')^2 &= (b')^2 + (c')^2 - 2b'c'\cos\alpha' \end{aligned}$$

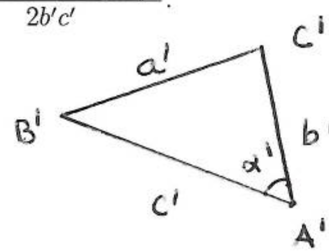
de donde

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

y

$$\cos\alpha' = \frac{(b')^2 + (c')^2 - (a')^2}{2b'c'}.$$





Dividiendo las igualdades anteriores y usando que $\dfrac{u}{v} = \dfrac{x}{y}$ implica que $\dfrac{u+x}{v+y} = \dfrac{u}{v} = \dfrac{u-x}{v-y}$ y que $\dfrac{u^2}{v^2} = \dfrac{x^2}{y^2}$,

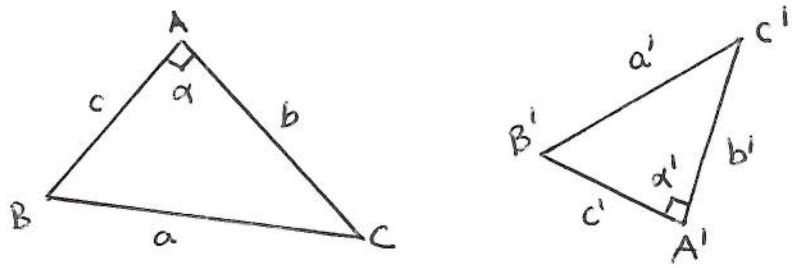
$$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{(b')^2 + (c')^2 - (a')^2}\,\frac{b'c'}{bc} = k^2\frac{1}{k^2} = 1.$$

Como ambos ángulos son menores que 180^0, $\alpha = \alpha'$. Análogamente se prueba que $\beta = \beta'$ y que $\gamma = \gamma'$.

Como corolario se obtiene el resultado que ya vimos que dos triángulos con lados iguales son iguales.

Proposición 1.15 *Dos triángulos son semejantes si dos de sus lados correspondientes son proporcionales y los ángulos entre esos dos lados son iguales.*

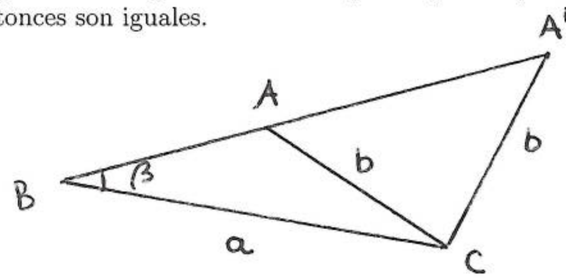
Demostración: Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos tales que $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$ y $\alpha = \alpha'$. Como en la segunda demostración de la proposición 1.11 encimamos los triángulos de manera que $A = A'$ y que B' y C' estén respectivamente en las líneas AB y AC. Esto se puede porque $\alpha = \alpha'$. Es fácil ver que la condición $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ implica que $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$ y entonces por el lema 1.12 las rectas BC y $B'C'$ son paralelas, es decir $\beta = \beta'$ y $\gamma = \gamma'$, que es lo que queríamos probar.



Corolario 1.16 *Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes iguales y los ángulos entre ellos son iguales, entonces son congruentes.*

Por lo anterior se le ocurre a uno que la siguiente afirmación también debe de ser cierta:

Si dos triángulos tienen iguales dos lados y el ángulo adyacente a uno de los lados, entonces son iguales.



Construyamos un triángulo dados dos lados y el ángulo adyacente a uno sólo de ellos. Sean a y b los lados y β el ángulo adyacente al lado a, pero no al lado b. Si B y C son los extremos de a, trazamos la recta l que pasa por B y forma un ángulo β con a y el círculo $\mathcal{C}$ con centro en C y radio b.La recta l puede intersectar al círculo $\mathcal{C}$ en dos puntos A y A', en un sólo punto T o no intersectarla. En el primer caso obtenemos dos triángulos, a saber ABC y $A'BC$ que claramente no son iguales. En el segundo caso obtenemos un único triángulo TBC y en el tercer caso no se puede construir ningún triángulo con esas propiedades.

Como podemos encontrar lados a y b y ángulos β de manera que l intersecte a $\mathcal{C}$ en dos puntos, hemos probado que la afirmación en cuestión es falsa.

Veremos ahora algunos criterios de semejanza para casos especiales.

Proposición 1.17 *Dos triángulos rectángulos que tienen la hipotenusa y un cateto iguales son congruentes.*

Demostración: Sean a, b y c y a', b' y c' los lados de los dos triángulos rectángulos. Si c y c' son las hipotenusas y $a = a'$, por el teorema de Pitágoras
$$b^2 = c^2 - a^2 = (c')^2 - (a')^2 = (b')^2 .$$
De donde $b = b'$ y entonces los dos triángulos son iguales.

Proposición 1.18 *Dos triángulos rectángulos con ángulos α, β, γ, donde $\gamma = 90^0$, y α', β', γ' donde $\gamma' = 90^0$, son semejantes si $\alpha = \alpha'$.*

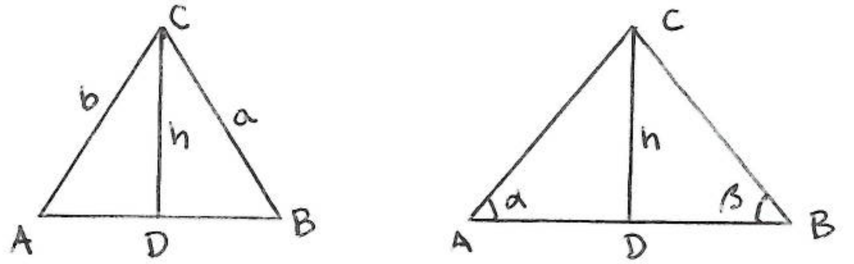
Demostración: Como los ángulos internos de un triángulo suman 180^0, tenemos
$$\beta = 90^0 - \alpha = 90^0 - \alpha' = \beta'.$$

Proposición 1.19 *Un triángulo es isósceles si y sólo si tiene dos ángulos iguales.*

Demostración: Sea ABC un triángulo isósceles con lados a, b, c, tales que $a = b$. Sean h la altura sobre el lado c y D el pie de h. Entonces los triángulos ACD y BCD son rectángulos con la hipotenusa y un cateto iguales y por la proposición 1.17 son iguales. Por lo tanto los ángulos correspondientes son iguales, es decir $\alpha = \beta$.

Sea ahora ABC un triángulo con lados a, b, c y con ángulos α, β, γ tales que $\alpha = \beta$. Igual que antes sean h la altura sobre el lado c y D el pie de h.

Entonces los triángulos ACD y BCD son rectángulos con $\alpha = \beta$ y por la proposición 1.18 son semejantes. Como además tienen la altura en común, son congruentes, es decir $a = b$.



Corolario 1.20 *En un triángulo isósceles ABC con lados a, b, c, tales que $a = b$, la altura sobre el lado c divide al triángulo en dos triángulos rectángulos iguales.*

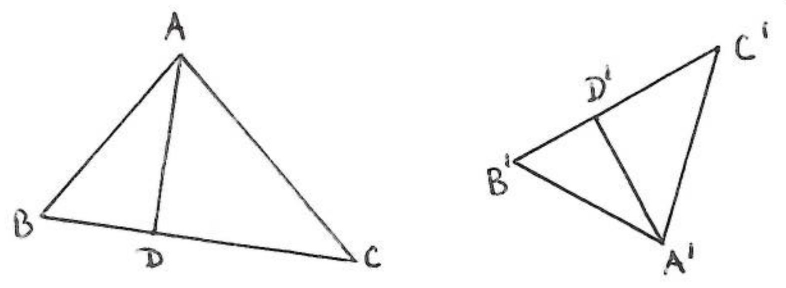
Proposición 1.21 *Dos triángulos isósceles con lados a, b, c, donde $a = b$, y a', b', c', donde $a' = b'$, y con ángulos α, β, γ, y α', β', γ' respectivamente, son semejantes si $\alpha = \alpha'$.*

Demostración: Por la proposición 1.19 los ángulos $\alpha = \beta$ y $\alpha' = \beta'$; por lo tanto tenemos dos triángulos con dos ángulos correspondientes iguales y por la proposición 1.11 son semejantes.

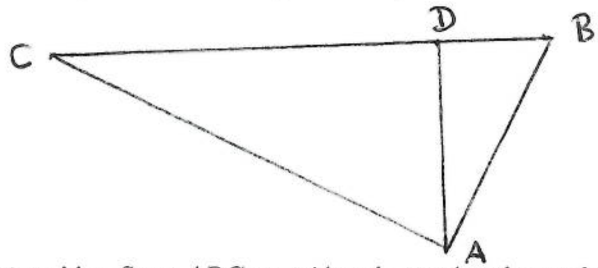
Finalizaremos esta sección con unos resultados que se prueban usando algunos de los criterios para la semejanza de triángulos vistos.

Proposición 1.22 *Las alturas correspondientes de dos triángulos semejantes tienen la misma razón que los lados correspondientes.*

Demostración: Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos semejantes con D y D' los pies de las alturas sobre los lados BC y $B'C'$, respectivamente. Por lo tanto los triángulos ABD y $A'B'D'$ son rectángulos con $\beta = \beta'$ y de la proposición 1.18 obtenemos que son semejantes con razón de semejanza $\frac{c}{c'}$.



Proposición 1.23 *La altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide el triángulo en dos triángulos semejantes entre sí.*



Demostración: Sean ABC un triángulo rectángulo con hipotenusa BC y D el pie de la altura sobre BC. El triángulo ABD es semejante al triángulo CBA pues tienen un ángulo recto y un ángulo en común. Por lo tanto $\beta = \sphericalangle DAC$ y los triángulo ABD y CAD son semejantes ya que son rectángulos.

Proposición 1.24 *El segmento entre los puntos medios de dos lados de un triángulo mide la mitad de la longitud del tercer lado y es paralelo a ese lado.*

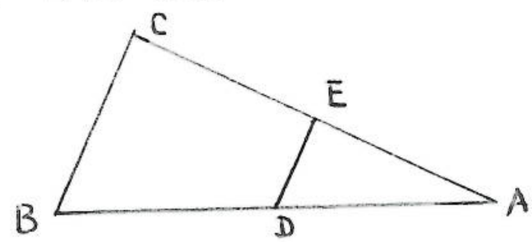
Demostración: Sean ABC un triángulo y D y E los puntos medios de AB y AC respectivamente. Entonces

$$\frac{AD}{DB} = 1 = \frac{AE}{EC}$$

y por el lema 1.12 DE es paralela a BC y por ende los triángulos ABC y ADE son semejantes. Además la razón de semejanza es

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AD + DB}{DB} = \frac{AB}{DB} + 1 = 2,$$

de donde $\dfrac{BC}{DE} = 2$ y $BC = 2DE$.



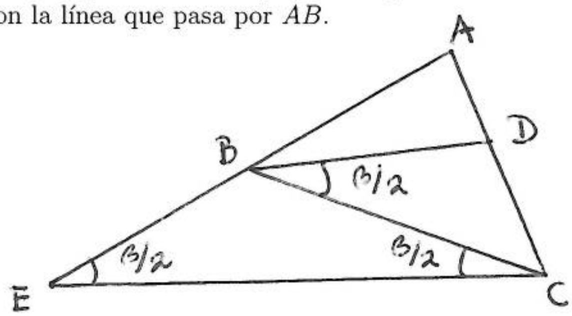
Corolario 1.25 *Si unimos los puntos medios de los lados de un triángulo obtendremos un triángulo semejante al triángulo dado con razón de semejanza* 2.

Demostración: Sean ABC un triángulo y D, E y F los puntos medios de AB, AC y BC respectivamente. Por la proposición anterior

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{EF} = \frac{AC}{DF} = 2.$$

Teorema 1.26 *Un ángulo bisector en un triángulo divide el lado opuesto en dos segmentos que tienen la misma razón que los otros dos lados.*

Demostración: Si ABC es un triángulo, tracemos la línea que bisecta al ángulo β y sea D la intersección de dicha línea con el lado AC. Por C trazamos una paralela a BD y sea E el punto de intersección de dicha paralela con la línea que pasa por AB.



Los triángulos ABD y AEC son semejantes pues sus ángulos correspondientes son iguales; entonces $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AB+BE}{AD+DC}$ de donde

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AB+BE-AB}{AD+DC-AD} = \frac{BE}{DC}. \tag{1.7}$$

Por otra parte

$$\prec DBC = \prec BCE = \frac{\beta}{2}$$

y como

$$\prec ABD = \prec AEC = \prec DBC = \frac{\beta}{2}$$

resulta que el triángulo BCE es isósceles y que $BC = BE$. Sustituyendo en (1.7) obtenemos $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DC}$, es decir

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}.$$

Esto termina la prueba.

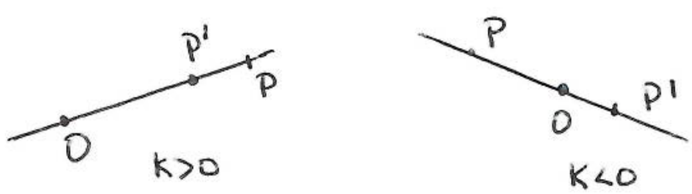
1.5.1 Ejercicios

1. Pruebe la proposición 1.14 usando el lema 1.12.
2. Pruebe la proposición 1.15 usando la ley de los cosenos.
3. Los lados de un triángulo ABC están en razón $2:3:4$. Si AC es el lado más corto, D es el punto en AC tal que BD es la recta que bisecta el ángulo en B y la longitud de AC es 10, ¿cuál es la longitud de los segmentos AD y DC?
4. En un triángulo ABC, el punto F divide al lado AC en la razón $1:2$. Si G es el punto medio de BF y E es el punto de intersección de BC y AG, ¿en qué razón divide E al segmento BC?.

1.6 Homotecia

Una homotecia es una transformación del plano que nos manda polígonos en polígonos semejantes. Se define a partir de un punto O del plano, llamado centro de homotecia y de un número k (positivo o negativo), llamado razón de homotecia.

Sean P un punto distinto de O, l la recta que pasa por P y O y P' el punto en l tal que $k = \frac{OP'}{OP}$. Entonces P' será el homotético a P con respecto a O y con razón k. Si $k > 0$, entonces P y P' están del mismo lado de l con respecto a O y si $k < 0$, P y P' están en lados distintos de l.

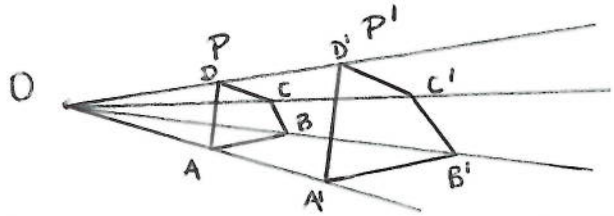


Si $k = 0$, $P' = O$ y todos los puntos van a dar al centro de homotecia, tomaremos siempre $k \neq 0$.

Por otra parte definiremos al homotético de O como el mismo.

Notemos que si P' es homotético a P con respecto a O y con razón k, entonces P es homotético a P' con respecto a O y con razón $\frac{1}{k}$, ya que si $k = \frac{OP'}{OP}$, entonces $\frac{OP}{OP'} = \frac{1}{k}$ y P está en la línea que pasa por O y P'.

Esto nos permite ahora hablar de polígonos homotéticos a otros. Si P es un polígono cualquiera con vértices $A, B, C, D, \dots$ el polígono P' es homotético a P con respecto a O y con razón k si los vértices de P', $A', B', C', D', \dots$ son tales que $A', B', C', D' \dots$ son los puntos homotéticos, con respecto a O y razón k, a $A, B, C, D, \dots$, respectivamente. Decimos entonces que P' es homotético a P con centro de homotecia O y razón de homotecia k.



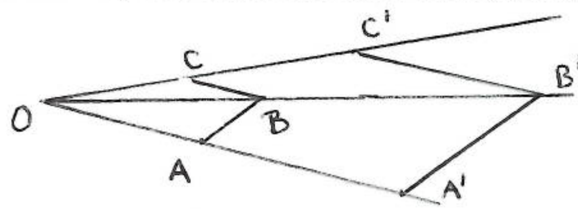
De lo anterior se sigue inmediatamente que si P y P', con vértices $A, B; C; ...$ y $A', B', C, ...$ respectivamente, son homotéticos entre sí con centro y razón de homotecia O, k, entonces

$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \cdots.$$

Es más tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.27 *Si dos polígonos son homotéticos entre sí, entonces son semejantes.*

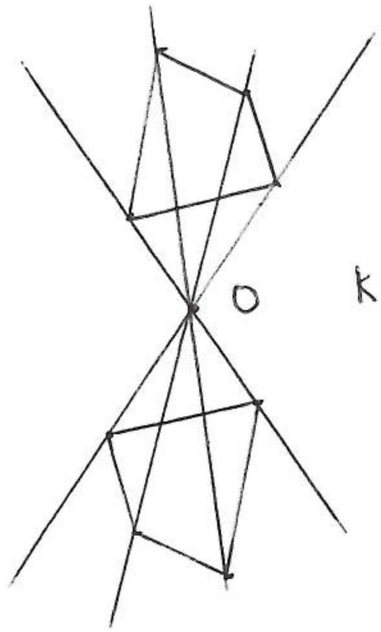
Demostración: Sean P y P', con vértices $A, B; C; ...$ y $A', B', C, ...$ respectivamente, homotéticos entre sí con centro y razón de homotecia O, k.



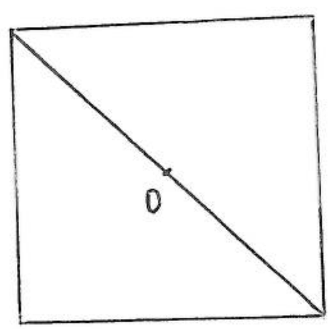
Los triángulos $OA'B'$ y OAB son semejantes entre sí pues $k = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$, es decir, los lados OA' y OB' son proporcionales a los lados OA y OB y cuando $k > 0$ tienen en común el ángulo en O y cuando $k < 0$ el ángulo en O es opuesto por el vértice. Por lo tanto $k = \frac{A'B'}{AB}$ y las rectas $A'B'$ y AB son paralelas. De la misma manera se prueba $k = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \cdots$ y que los lados correspondientes son paralelos.

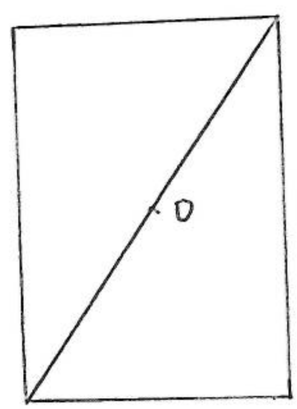
Debido al resultado anterior decimos que dos figuras son homotéticas si son semejantes y están colocadas semejantemente y por eso a la homotecia también se le llama similitud y al centro y a la razón de homotecia también se les llama centro y razón de similitud respectivamente.

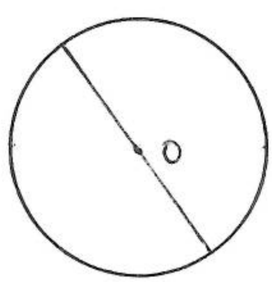
Cuando la razón de homotecia o similitud entre dos figuras es -1 se dice que éstas son simétricas entre sí con respecto a 0 que entonces se conoce como centro de simetría.



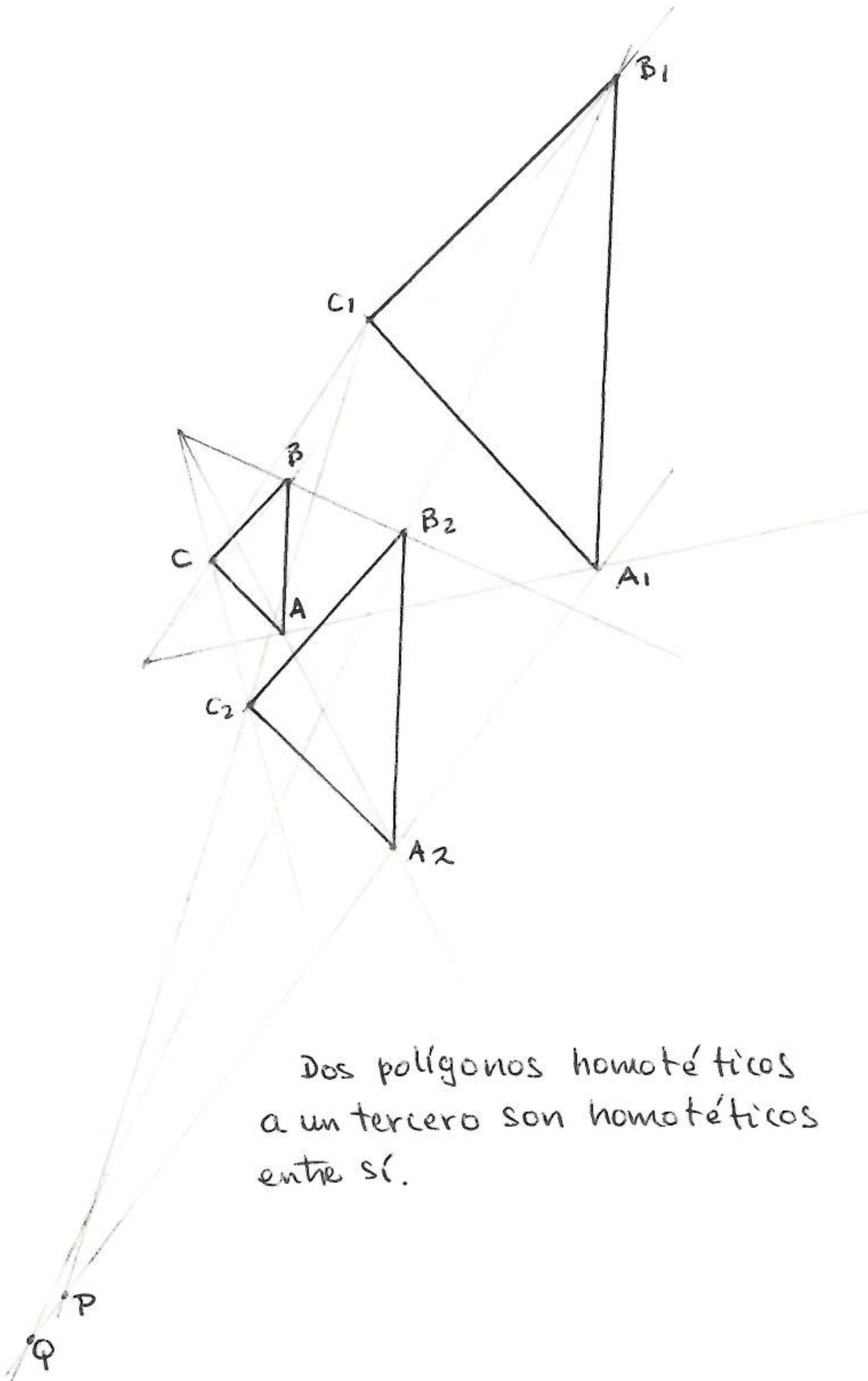
K = -1







figuras simétricas
respecto a su centro



Dos polígonos homotéticos a un tercero son homotéticos entre sí.

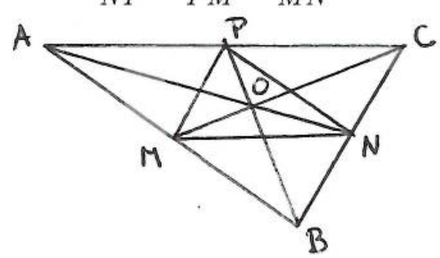
Decimos que una figura es simétrica con respecto a un punto dado dentro de la figura, si las dos figuras que se obtienen al cortar con cualquier diámetro que pase por el punto dado son simétricas entre sí.

Por ejemplo los círculos, cuadrados y rectángulos son simétricos con respecto a su centro.

Proposición 1.28 *Si unimos los puntos medios de los lados de un triángulo, obtenemos un triángulo homotético al triángulo dado.*

Demostración: En el corolario 1.25 probamos que los dos triángulos son semejantes con razón de semejanza 2, es decir, si ABC es el triángulo original y M, N, P son los puntos medios de AB, BC y CA respectivamente, entonces

$$\frac{AB}{NP} = \frac{BC}{PM} = \frac{CA}{MN} = 2. \tag{1.8}$$



Para probar que también son homotéticos hace falta encontrar el centro de homotecia. Recordemos que las rectas AN, BP y CM son precisamente las medianas de un triángulo y que éstas se intersectan en un punto O llamado centroide o mediano. Veremos que O es el centro de homotecia. Como los triángulos ABC y NPM son semejantes, las rectas BC y PN son paralelas entre sí. Por lo tanto los triángulos OPM y OBC son semejantes y por (1.8)

$$\frac{OB}{OP} = \frac{CO}{MO} = \frac{BC}{PM} = 2,$$

es decir B y C son homotéticos, con centro O y razón 2 a P y M respectivamente. Análogamente se prueba que A es homotético a N con el mismo centro y la misma razón. En consecuencia ABC es homotético a NPM con centro de homotecia O y razón 2 y el triángulo formado por los puntos medios de un triángulo dado es homotético a éste con razón $\frac{1}{2}$ y centro de homotecia el centroide.

Proposición 1.29 *Si dos polígonos son homotéticos a un tercero, son homotéticos entre sí.*

Demostración: Lo haremos para triángulos y de ahí se sigue el resultado para cualquier polígono. Sean $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ triángulos homotéticos a ABC. Entonces los lados A_1B_1, B_1C_1 y A_1C_1 son paralelos a los lados A_2B_2, B_2C_2 y A_2C_2 respectivamente. Veremos que las rectas A_1A_2, B_1B_2 y C_1C_2 son concurrentes.

Ver figura página anterior

Sean P y Q la intersección de las rectas A_1A_2 y C_1C_2 y A_1A_2 y B_1B_2, respectivamente. Como A_1C_1 es paralela a A_2C_2, los triángulos PA_1C_1 y PA_2C_2 son semejantes y entonces

$$\frac{PA_1}{PA_2} = \frac{PC_1}{PC_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}.$$

Como A_1B_1 es paralela a A_2B_2, los triángulos QA_1B_1 y QA_2B_2 son semejantes y entonces

$$\frac{QA_1}{QA_2} = \frac{QB_1}{QB_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}.$$

Como los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ son semejantes

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}.$$

Por lo tanto

$$\frac{PA_1}{PA_2} = \frac{QA_1}{QA_2},$$

de donde P y Q dividen al segmento A_1A_2 en la misma razón y por el lema1.1 $P = Q$. Esto demuestra que las líneas A_1A_2, B_1B_2 y C_1C_2 concurren y que

$$\frac{PA_1}{PA_2} = \frac{PB_1}{PB_2} = \frac{PC_1}{PC_2}$$

y en consecuencia los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ son homotéticos con centro de homotecia P y razón $\frac{PA_1}{PA_2}$.

1.6.1 Ejercicios

1. Dé un ejemplo de los polígonos semejantes entre sí pero que no sean homotéticos.

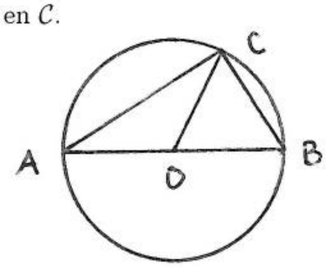
2. Dibuje varios ejemplos de polígonos homotéticos entre sí, algunos con la razón de homotecia positivo y otros negativa.

3. Dibuje varios ejemplos de polígonos simétricos con respecto al algún punto y otros que no lo sean.

1.7 Círculos

Supongamos que queremos construir un triángulo rectángulo dada su hipotenusa, este problema se puede resolver fácilmente si conocemos cierto resultado sobre el ángulo entre dos cuerdas que se intersectan sobre el círculo.

Sean AB un segmento de recta, $\mathcal{C}$ el círculo con diámetro AB, O el centro del círculo y C cualquier punto en $\mathcal{C}$.



Entonces los triángulos CAO y COB son isósceles y por lo tanto tenemos las siguientes igualdades $\prec OCB = \prec CBO$ y $\prec ACO = \prec CAO$. Por otra parte como ACB es un triángulo la suma de sus ángulos internos es de 180^0, es decir

$$\prec OAC + \prec ACO + \prec OCB + \prec CBO = 180^0$$

de donde

$$2 \prec ACO + 2 \prec OCB = 180^0$$

y por lo tanto

$$\prec ACB = \prec ACO + \prec OCB = 90^0.$$

Hemos probado que para cualquier punto C sobre el círculo $\mathcal{C}$ el triángulo ABC es rectángulo. Notemos que esto significa que la hipotenusa de un triángulo no es suficiente para determinarlo.

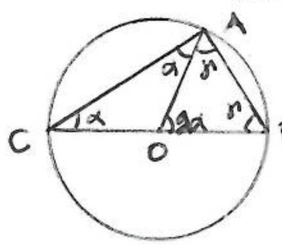
Lo que acabamos de ver es un caso particular de la siguiente situación: Supongamos que AB es cualquier cuerda fija de un círculo $\mathcal{C}$ y C es cualquier punto sobre $\mathcal{C}$, veremos que el ángulo $\prec ACB$ no depende de C siempre que C este sobre el círculo $\mathcal{C}$ y del mismo lado de la cuerda AB, es decir que esté en el mismo arco de los dos determinados por AB. Para ello sea O el centro de $\mathcal{C}$, supongamos primero que C que CB es un diámetro.

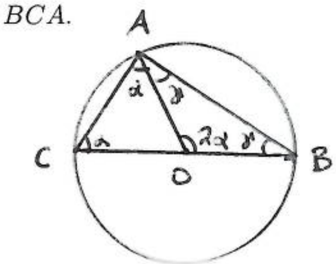
Como los triángulos OAC y OAB son isósceles, $\prec OAC = \prec OCA = \alpha$ y $\prec OAB = \prec ABO = \gamma$. Entonces

$$2\alpha + 2\gamma = 180^0$$

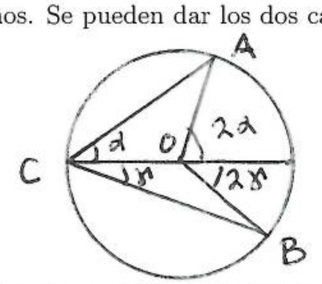
pues es la suma de los ángulos internos del triángulo ABC, por lo tanto

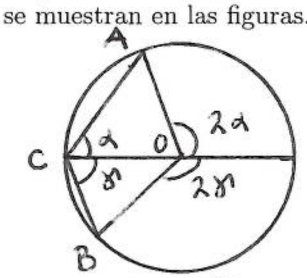
$$\prec AOB = 2\alpha = 2 \prec BCA.$$



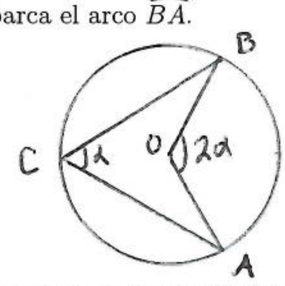


Si CB no es un diámetro, sea CD el diámetro que pasa por C. Aplicamos entonces el resultado anterior a los ángulos $\prec DCA$ y $\prec BCD$ y sumamos. Se pueden dar los dos casos que se muestran en las figuras.





El ángulo $\prec AOB$ es el ángulo central que abarca el arco $\widehat{AB}$ y $\prec BOA$ es el ángulo central que abarca el arco $\widehat{BA}$.

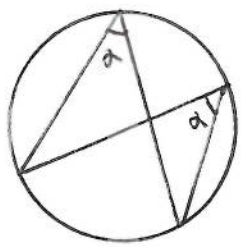


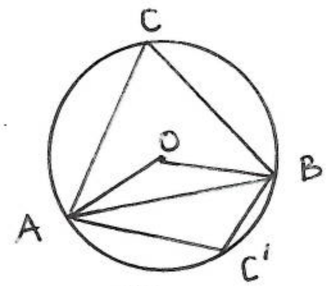
Hemos probado entonces el siguiente resultado conocido como teorema del ángulo central.

Teorema 1.30 (del ángulo central) *Sean $\mathcal{C}$ una círculo con centro O, AB una cuerda en $\mathcal{C}$ y C un punto en el arco $\widehat{BA}$. Entonces el ángulo central que abarca el arco $\widehat{AB}$ es el doble del ángulo ACB.*

El siguiente corolario es de gran utilidad.

Corolario 1.31 *Si dos ángulos inscritos en una circunferencia abarcan el mismo arco, entonces son iguales.*





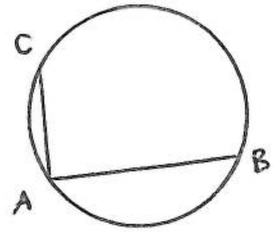
Observemos ahora que si C está en el arco $\widehat{BA}$ y C' está en el arco $\widehat{AB}$, como

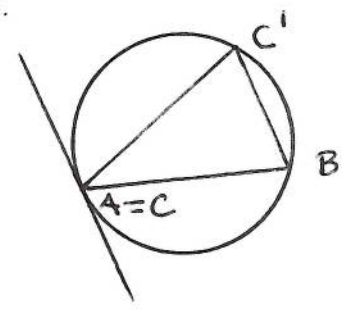
$$2 \prec ACB + 2 \prec BC'A = \prec AOB + \prec BOA = 360^0,$$

tenemos que

$$\prec ACB + \prec BC'A = 180^0.$$

Cuando el punto C en el teorema del ángulo central se aproxima a uno de los extremos de la cuerda AB, digamos a A, entonces la cuerda AC se aproxima a una tangente al círculo $\mathcal{C}$.





Si $A = C$, tenemos

Teorema 1.32 (de la tangente) *El ángulo entre la tangente a un círculo y una cuerda que pase por el punto de tangencia es igual al ángulo subtendido desde cualquier punto de la circunferencia hacia la cuerda en el lado opuesto de la cuerda.*

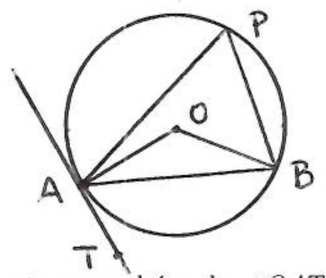
Demostración: Sean AB una cuerda en el círculo $\mathcal{C}$, AT la tangente a $\mathcal{C}$ que pasa por A, O el centro de $\mathcal{C}$ y P cualquier punto en $\mathcal{C}$ distinto de A y B y en el lado opuesto de la cuerda con respecto a la tangente. Por el teorema del ángulo central, $2 \prec APB = \prec AOB$.

Como el triángulo AOB es isósceles, $\prec BAO = \prec OBA$ y entonces

$$2 \prec APB + 2 \prec BAO = \prec AOB + 2 \prec OAB = 180^0.$$

De donde

$$\prec APB + \prec BAO = 90^0. \tag{1.9}$$



Por otra parte como el ángulo $\prec OAT$ es recto, tenemos que

$$\prec BAT = 90^0 - \prec BAO. \tag{1.10}$$

De (1.9) y (1.10) obtenemos el resultado deseado.

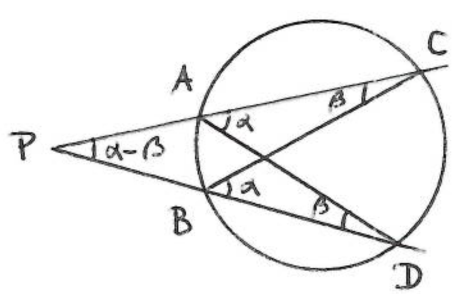
Cuando el punto está fuera o dentro del círculo el teorema del ángulo central se generaliza en la siguiente proposición.

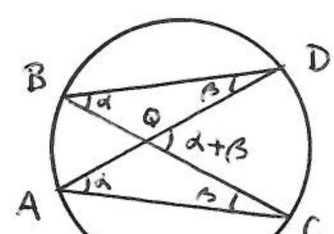
Proposición 1.33 *Sea $\mathcal{C}$ un círculo con centro en O. Si P es un punto fuera de $\mathcal{C}$, y AC y BD son cuerdas que se intersectan en P, entonces*

$$2 \prec BPA = \prec DOC - \prec AOB.$$

Si Q es un punto dentro de $\mathcal{C}$ y BC y AD son cuerdas que se intersectan en Q, entonces

$$2 \prec DQC = \prec AOB + \prec DOC.$$





Demostración: Tenemos que $\prec DAC = \prec DBC = \alpha$ y que $\prec ACB = \prec ADB = \beta$ pues ambos abarcan el mismo arco. Como

$$\prec DQC = \alpha + \beta \;\text{ y }\; \prec BPA = \alpha - \beta$$

y por el teorema del ángulo central

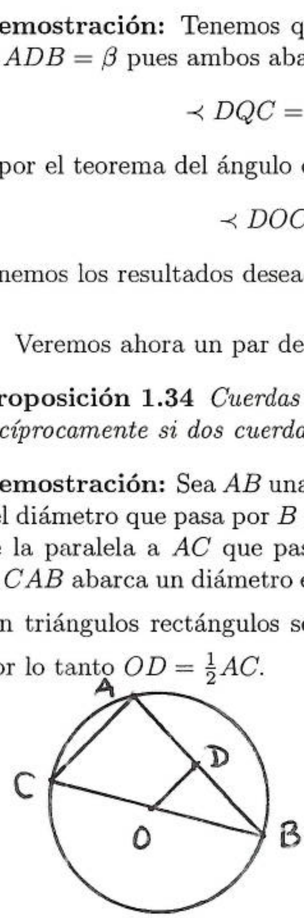
$$\prec DOC = 2\alpha \;\text{ y }\; \prec AOB = 2\beta,$$

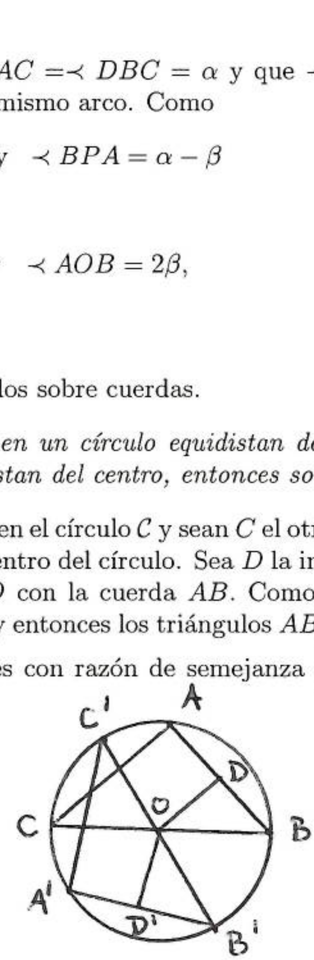
tenemos los resultados deseados.

Veremos ahora un par de resultados sobre cuerdas.

Proposición 1.34 *Cuerdas iguales en un círculo equidistan del centro y recíprocamente si dos cuerdas equidistan del centro, entonces son iguales.*

Demostración: Sea AB una cuerda en el círculo $\mathcal{C}$ y sean C el otro extremo del diámetro que pasa por B y O el centro del círculo. Sea D la intersección de la paralela a AC que pasa por O con la cuerda AB. Como el ángulo $\prec CAB$ abarca un diámetro es recto y entonces los triángulos ABC y DBO son triángulos rectángulos semejantes con razón de semejanza $\dfrac{CB}{OB} = \dfrac{1}{2}$. Por lo tanto $OD = \frac{1}{2}AC$.





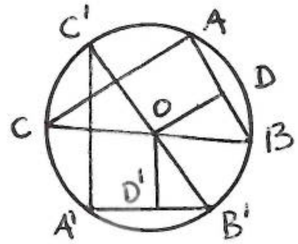
Sea ahora $A'B'$ otra cuerda en $\mathcal{C}$ tal que $AB = A'B'$; construimos C' y D' como antes. Entonces los triángulos rectángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes con $BC = B'C'$ (ambos son diámetros) y entonces

$$OD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}A'C' = OD'.$$

Esto prueba que las cuerdas equidistan del centro pues OD y OD' son las distancias de O a la cuerdas AB y $A'B'$ respectivamente.

Para probar el recíproco sea $A'B'$ otra cuerda en $\mathcal{C}$ y construyamos C' y D' como antes. Entonces los triángulos rectángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes a los triángulos rectángulos DBO y $D'B'O$ respectivamente con

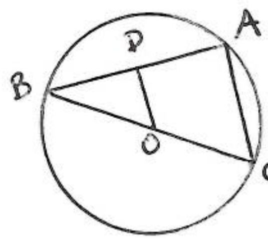
$$OD = \frac{1}{2}AC \;\text{ y }\; \frac{1}{2}A'C' = OD'.$$



Como las cuerdas equidistan del centro y OD y OD' son las distancias de O a la cuerdas AB y $A'B'$, respectivamente, entonces $OD = OD'$ y por ende $AC = A'C'$. Usando que $BC = B'C'$, pues ambos son diámetros, y que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son rectángulos obtenemos $AB = A'B'$, es decir que las cuerdas son iguales.

Notemos que en la prueba de la proposición anterior demostramos que la recta que pasa por el centro de un círculo y es perpendicular a una cuerda en dicho círculo, bisecta a la cuerda y usando esto se puede dar una relación algebraica entre la longitud de la cuerda y la distancia al centro del círculo. En efecto si AB es una cuerda en un círculo de radio r y la cuerda tiene longitud a, entonces la distancia, d, del centro del círculo a la cuerda es

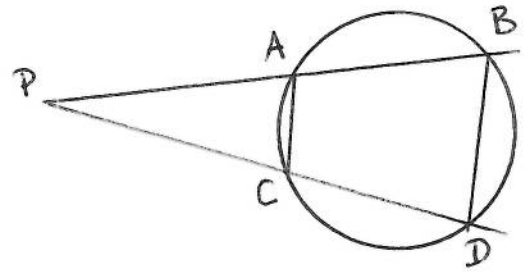
$$d = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}.$$



Si D es la intersección de la perpendicular a la cuerda que pasa por O, el centro del círculo, entonces $DB = \frac{a}{2}$ y el triángulo ODB es rectángulo. Usando el teorema de Pitágoras y notando que $r = OB$ y $d = OD$, obtenemos el resultado deseado.

Proposición 1.35 *Si AB y CD son dos cuerdas en el círculo $\mathcal{C}$ y P es el punto de intersección de las cuerdas, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

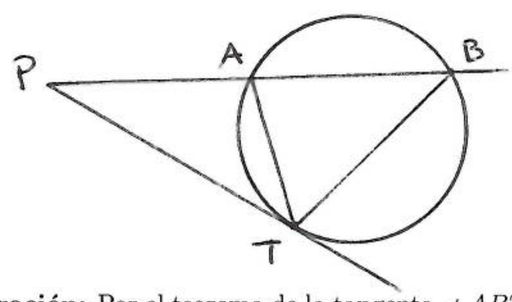
Demostración: Los triángulos APC y DPB son semejantes ya que tienen un ángulo en común y el ángulo $\prec DCA$ es suplementario tanto al ángulo $\prec ACP$, por estar en una línea, como al $\prec PBD$, pues ambos subtienden la misma cuerda AD pero de lados opuestos.



Por lo tanto
$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}.$$
Si P está dentro del círculo, los triángulos ADP y CBP son semejantes pues $\prec PAD = \prec BCP$ y $\prec ADP = \prec PBC$ al subtender los mismos arcos. Por lo tanto
$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}.$$

El caso límite de la proposición anterior dice así:

Proposición 1.36 *Si AB es una cuerda en el círculo $\mathcal{C}$ y PT es una tangente a $\mathcal{C}$ con P en la línea AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

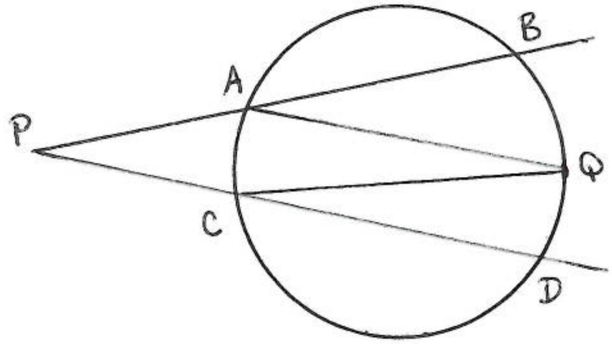


Demostración: Por el teorema de la tangente $\prec ABT = \prec ATP$, entonces los triángulos PTA y PBT son semejante y de ahí
$$\frac{PT}{PA} = \frac{PB}{PT}.$$

Corolario 1.37 *Si desde un punto P fuera de un círculo $\mathcal{C}$ se trazan las tangentes a $\mathcal{C}$ con puntos de tangencia T y T', entonces $PT = PT'$.*

1.7.1 Ejercicios

1. Si los puntos A, B, Q, D y C están el círculo como se muestra en el dibujo y las medidas de los arcos $\widehat{BQ}$ y $\widehat{QD}$ son 42^0 y 35^0 respectivamente. Encuentre la suma de los ángulos en P y Q.



1. Pruebe el corolario 1.37.

2. Sean AB el diámetro de un círculo con centro en O y C un punto en el círculo tal que $\prec BOC = 60^0$. Si el diámetro del círculo mide 5 unidades, ¿cuánto mide la cuerda AC?

3. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos círculos de radios 10 y 17 unidades respectivamente. Si los círculos se intersectan de tal manera que la cuerda común tiene una longitud de 16 unidades, ¿cuál es la distancia entre los centros de los círculos?

4. Sean $\mathcal{C}$ un círculo, AB un diámetro de $\mathcal{C}$ y AD y BC tangentes a $\mathcal{C}$ que se intersecten en un punto de $\mathcal{C}$. Si $AD = a$ y $BC = b$ con $a \neq b$, encuentre AB.

1.8 Medias aritmética y geométrica

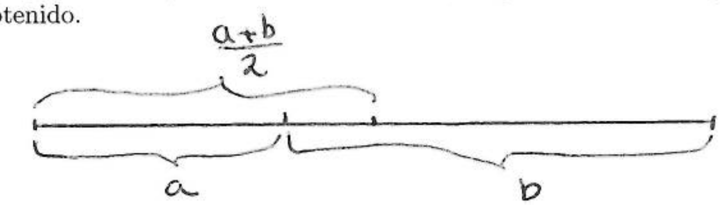
Veremos una simpática aplicación de la proposición 1.35 a las medias aritmética y geométrica de dos números positivos.

Recordemos que la media aritmética de dos longitudes, o números, a y b es su promedio $\dfrac{a+b}{2}$ y que la media geométrica es la raíz cuadrada de su producto $\sqrt{ab}$. Por ejemplo las medias aritmética y geométrica de 8 y 2 son 5 y 4 respectivamente.

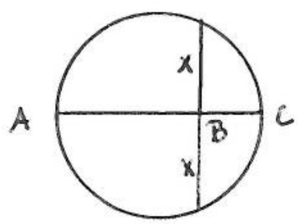
Se puede encontrar la media geométrica de dos números positivos resolviendo la ecuación $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, pues de aquí $x^2 = ab$. Debido a esto la media geométrica se conoce también como media proporcional entre a y b.

¿Existe alguna forma geométrica de encontrar las medias aritmética y geométrica?

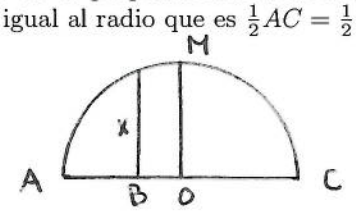
Para la media aritmética simplemente se marcan las dos longitudes, una junto a otra, sobre una línea recta y luego se bisecta el segmento así obtenido.



La ecuación $\frac{AB}{x} = \frac{x}{BC}$ nos sugiere un método para encontrar la media geométrica. Dibujamos el círculo con diámetro $AB + BC$ y luego la cuerda perpendicular al diámetro y que pase por B. El diámetro bisecta entonces la cuerda y por la proposición 1.35, $xx = AB \cdot BC$, de donde x es la media geométrica.



Además si O es el centro del círculo y MO es perpendicular al diámetro AC, entonces MO es la perpendicular más larga en el semicírculo con diámetro AC y es igual al radio que es $\frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(AB + BC)$.

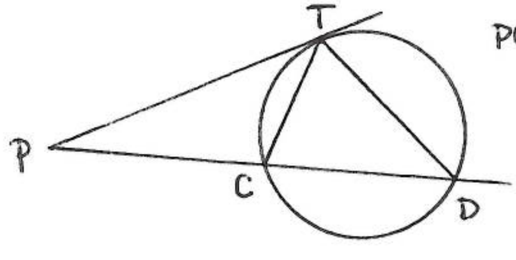


Por lo tanto tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.38 *La media geométrica de dos números positivos es siempre menor que su media aritmética.*

Podemos además reescribir la proposición 1.36 usando este lenguaje.

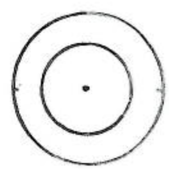
Proposición 1.39 *Si desde un punto exterior a un círculo se trazan una tangente y una secante al círculo, la tangente es la media proporcional entre la cuerda determinada por la secante y su segmento externo.*



$PC \cdot PD = PT^2$

1.9 Círculos homotéticos

Dos círculos concéntricos son siempre homotéticos con el centro del círculo como centro de homotecia y la razón entre sus lados la razón de homotecia.

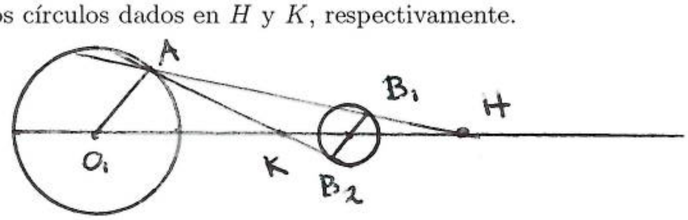


¿Qué pasará con dos círculos no concéntricos?

Como las homotecias "conservan la forma" es de esperarse que cualesquiera dos círculos siempre son homotéticos. En efecto tenemos

Proposición 1.40 *Dos círculos cualesquiera son homotéticos entre sí*

Demostración: Consideremos dos círculos no concéntricos C_1 y C_2 con centros O_1 y O_2 y radios r_1 y r_2, respectivamente. Sea A cualquier punto en la circunferencia de C_1 no colineal con los centros. Trazamos el radio O_1A y el diámetro de C_2 paralelo a ese radio. Sean B_1 y B_2 los extremos de dicho diámetro. Los segmentos AB_1 y AB_2 intersectan la línea de los centros de los círculos dados en H y K, respectivamente.



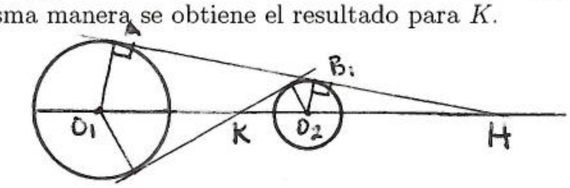
Los triángulos O_1AK y O_2B_2K son semejantes entre sí, así como los triángulos O_1AH y O_2B_1H. Por lo tanto los dos círculos son homotéticos entre sí de dos formas con centros de homotecia H y K y razón de homotecia la razón entre los radios. Además se obtiene que

$$\frac{O_1K}{KO_2} = \frac{r_1}{r_2} = -\frac{O_1H}{HO_2},$$

es decir H y K dividen el segmento O_1O_2 externa e internamente en la misma razón.

Corolario 1.41 *Si dos círculos tienen tangentes externas comunes, estas tangentes pasan por uno de sus centros de homotecia, y si tienen tangentes internas comunes éstas pasan por el otro centro de homotecia.*

Demostración: Si en la demostración de la proposición anterior, el punto A es tal que AH es tangente al círculo C_1, entonces también es tangente al círculo C_2, debido a la semejanza de los triángulos AO_1H y B_1O_2H. De la misma manera se obtiene el resultado para K.



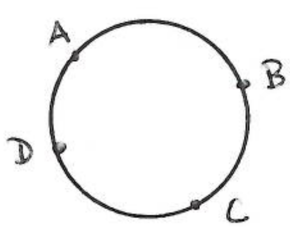
1.9.1 Ejercicios

1. ¿Cuáles son los centros de similitud de dos círculos no concéntrincos con radios iguales?

2. Si la distancia entre los centros de dos círculos, cuyos radios son r_1 y r_2 es c, encuentre los centros de similitud.

1.10 Cuadriláteros cíclicos

Un polígono es cíclico si todos sus vértices están en un círculo.



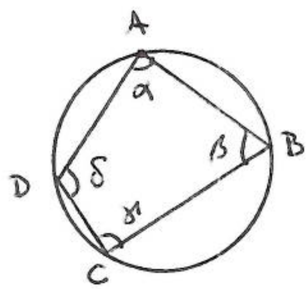
Hemos visto que cualquier triángulo es cíclico, pero no todo cuadrilátero lo es. Para verlo basta tomar tres puntos A, B y C en un círculo $\mathcal{C}$ y otro

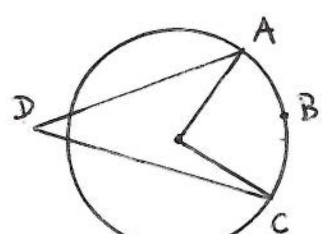
D fuera de $\mathcal{C}$, pues si existiera otro círculo $\mathcal{C}'$ que contuviera a los cuatro puntos dados, debería ser $\mathcal{C}$ pues los tres puntos A, B y C determinan un único círculo.

En esta sección daremos condiciones necesarias y suficientes para que un cuadrilátero sea cíclico y veremos algunas de sus propiedades.

Proposition 1 *Un cuadrilátero convexo es cíclico si y sólo si la suma de cada par de ángulos opuestos es igual a* 180^0.

Demostración: Sea $ABCD$ un cuadrilátero con ángulos α, β, γ y δ. Si es cíclico entonces los ángulos α y γ subtienden la cuerda BD pero de lados opuestos y por la observación que sigue del teorema del ángulo central $\alpha + \gamma = 180^0$. Análogamente $\beta + \delta = 180^0$.

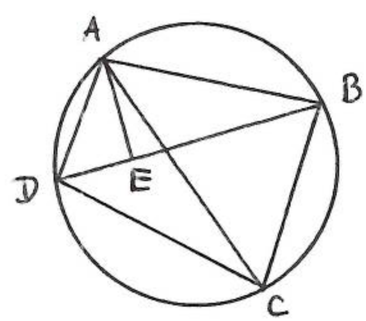




Supongamos ahora que $\alpha + \gamma = 180^0$ y $\beta + \delta = 180^0$ y sean $\mathcal{C}$ el círculo que pasa por A, B y C y O su centro. Si D no perteneciera a $\mathcal{C}$, entonces, usando la proposición 1.33, $2\delta \neq \prec COA$ y como $2\beta = \prec AOC$ tendríamos que $2\delta + 2\beta \neq 360^0$ lo que contradice que $\beta + \delta = 180^0$. Por lo tanto D también está en $\mathcal{C}$ y el cuadrilátero es cíclico.

Ptolomeo (150 DC) probó el siguiente teorema sobre los cuadriláteros cíclicos.

Teorema 1.42 (de Ptolomeo) *El producto de las diagonales de un cuadrilátero cíclico es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.*



Demostración: Sean $ABCD$ un cuadrilátero cíclico y $\mathcal{C}$ el círculo que lo contiene. Sea E sobre la diagonal BD de manera que $\prec DAE = \prec CAB$. Los triángulos DAE y CAB son semejantes pues $\prec EDA = \prec BCA$ ya que ambos ángulos subtienden el arco $\widehat{BA}$. Por lo tanto $\dfrac{AD}{ED} = \dfrac{AC}{BC}$, es decir

$$AD \cdot BC = ED \cdot AC. \tag{1.11}$$

Por otra parte los triángulos ADC y AEB son semejantes pues

$$\begin{gathered}\prec \ DAC = \prec DAE + \prec EAC = \prec EAB \\ \text{y} \\ \prec \ ABE = \prec ABD = \prec ACD\end{gathered}$$

ya que subtienden el arco $\widehat{AD}$. Por lo tanto $\dfrac{AB}{BE} = \dfrac{AC}{CD}$, de donde

$$AB \cdot CD = BE \cdot AC. \tag{1.12}$$

Sumando (1.11) y (1.12) obtenemos

$$\begin{aligned} AD \cdot BC + AB \cdot CD &= ED \cdot AC + BE \cdot AC = \\ &= (ED + BE)\, AC = BD \cdot AC \end{aligned}$$

que es lo que deseábamos probar.

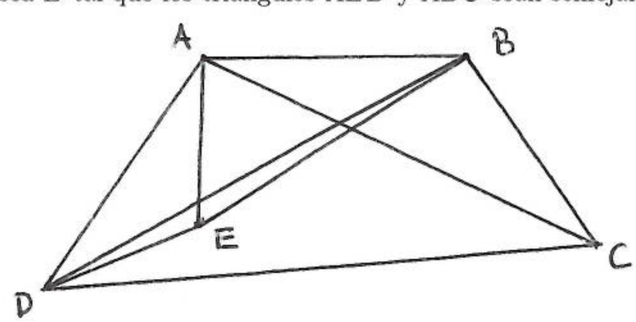
El inverso del teorema de Ptolomeo también es cierto.

Teorema 1.43 *Todo cuadrilátero tal que el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos es cíclico.*

Demostración: Dado el cuadrilátero $ABCD$ tal que

$$BD \cdot AC = AD \cdot BC + AB \cdot CD \tag{1.13}$$

sea E tal que los triángulos AED y ABC sean semejantes.



Entonces
$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} \tag{1.14}$$
y
$$\prec DAE = \prec CAB,$$
de donde
$$\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$$
y
$$\prec DAC = \prec DAE + \prec EAC = \prec EAB$$
y entonces por la proposición 1.15 los triángulos AEB y ADC son semejantes. Obtenemos así que
$$\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CD} \tag{1.15}$$
y como en la prueba del teorema de Ptolomeo de (1.14) y (1.15) deducimos que
$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = (DE + EB)\, AC,$$
que junto con la igualdad (1.13) nos da
$$DE + EB = BD,$$
lo que significa que E es colineal con B y D y por lo tanto
$$\prec ADB = \prec ACB$$
y D está en círculo generado por A, B y C.

1.10.1 Ejercicios

1. Verifique numéricamente el teorema de Ptolomeo para cada uno de los siguientes cuadriláteros inscritos en un círculo de radio uno.

   a) Un cuadrado

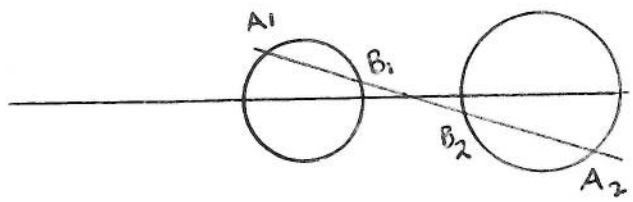
   b) Un trapecio isósceles uno de cuyos lados es un diámetro y sus otros tres lados son iguales.

   c) Un rectángulo cuyas dimensiones están en la relación 2:1.

2. Demuestre que el teorema de Ptolomeo aplicado a un rectángulo da el teorema de Pitágoras.

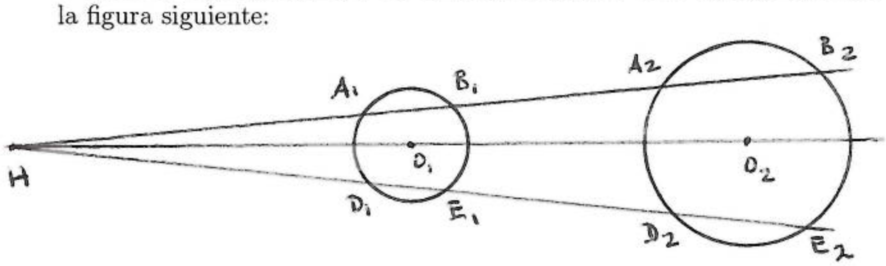
1.11 Puntos homólogos y antihomólogos

Si una línea que pasa por un centro de homotecia o similitud de dos círculos no concéntricos, intersecta uno de ellos en dos puntos distintos, intersectará también el otro círculo en dos puntos distintos.



Los cuatro puntos de intersección así obtenidos son homotéticos por pares y a los dos puntos de cada par homotético se les llama puntos homólogos, por ejemplo en la figura arriba, los puntos A_1 y A_2 y los puntos B_1 y B_2 son homológos. Pero también podemos aparear los puntos de tal forma que un punto de cada par esté en cada círculo y no sean homotéticos entre sí, como los puntos A_1 y B_2 y los puntos A_2 y B_1; a los puntos así apareados se les conoce como antihomólogos con respecto al centro de similitud en cuestión, es decir A_1 y B_2 y A_2 y B_1 son antihomólogos.

Propiedades de los puntos homólogos y antihomólogos Sean C_1 y C_2 dos círculos no concéntricos con centros O_1 y O_2, respectivamente y con centro de similitud H. Trazamos dos líneas que pasen por H y que intersecten cada una a cada círculo en dos puntos. En una línea tenemos los puntos A_1, B_1, A_2, B_2 y en la otra los puntos D_1, E_1, D_2, E_2, como en la figura siguiente:

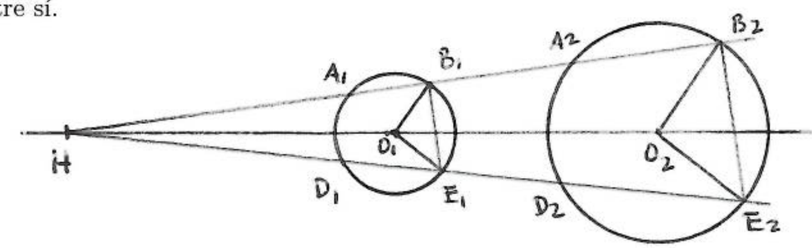


Entonces los pares de puntos A_1 y A_2, B_1 y B_2, D_1 y D_2 y E_1 y E_2 son homólogos y los pares de puntos A_1 y B_2, A_2 y B_1, D_1 y E_2, D_2 y E_1 son antihomólogos con respecto a H.

Tenemos las siguientes propiedades:

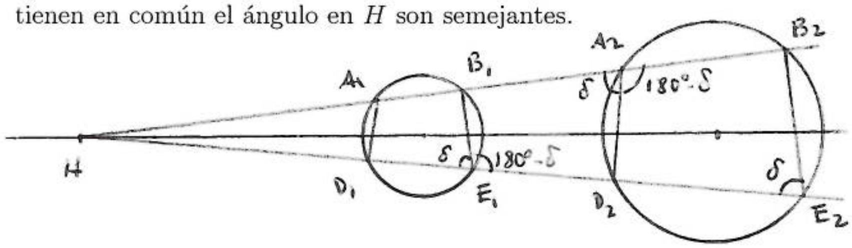
P1 Las rectas B_1E_1 y B_2E_2 son paralelas entre sí y entonces los triángulos HB_1E_1 y HB_2E_2 son semejantes.

Demostración: Como los triángulos HO_1B_1 y HO_2B_2 y los triángulos HO_1E_1 y HO_2E_2 son semejantes, los triángulos isósceles $O_1B_1E_1$ y $O_2B_2E_2$ también lo son. De ahí se sigue que las rectas B_1E_1 y B_2E_2 son paralelas entre sí.



P2 Los triángulos HA_2D_2 y HE_1B_1 son semejantes y el cuadrilátero $A_2D_2E_1B_1$ es cíclico.

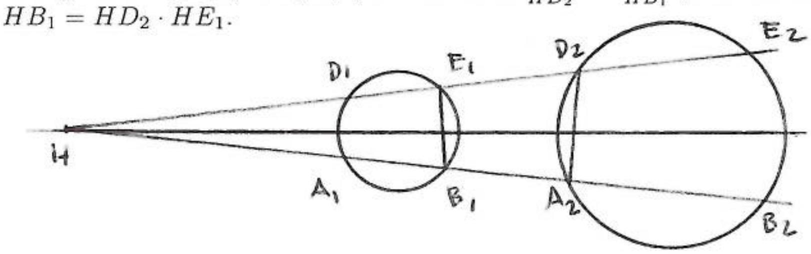
Demostración: Sea δ el $\prec B_2E_2D_2$. Como las rectas B_1E_1 y B_2E_2 son paralelas, $\delta = \prec B_1E_1H$; como el cuadrilátero $A_2B_2E_2D_2$ es cíclico, $\prec D_2A_2B_2 = 180^0 - \delta$ y de ahí $\prec HA_2D_2 = \delta$. Por lo tanto en los triángulos HA_2D_2 y HE_1B_1 se tiene que $\prec B_1E_1H = \prec HA_2D_2$ y como tienen en común el ángulo en H son semejantes.



Por otra parte, de $\delta = \prec B_1E_1H$ se obtiene que $\prec D_2E_1B_1 = 180^0 - \delta$, es decir $\prec HA_2D_2 + \prec D_2E_1B_1 = 180^0$. Análogamente se obtiene que $\prec E_1B_1A_2 + \prec A_2D_2E_1 = 180^0$ y entonces $A_2D_2E_1B_1$ es un cuadrilátero cíclico.

P3 El producto de los segmentos HA_2 y HB_1, $HA_2 \cdot HB_1$, es constante.

Demostración: Es consecuencia inmediata de la semejanza de los triángulos HA_2D_2 y HE_1B_1 pues entonces $\frac{HA_2}{HD_2} = \frac{HE_1}{HB_1}$ y de ahí $HA_2 \cdot HB_1 = HD_2 \cdot HE_1$.

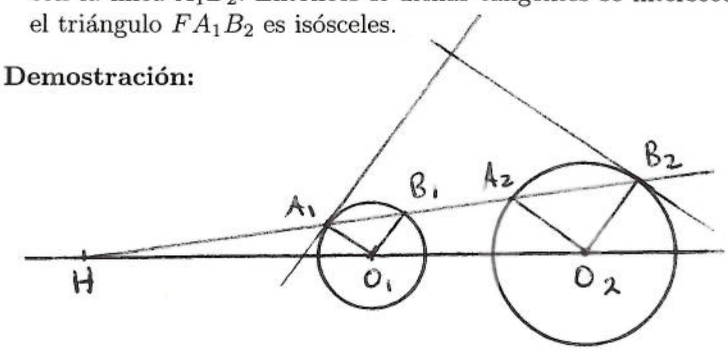


P4 Cada uno de los conjuntos $A_2D_2E_1B_1$ y $A_1D_1E_2B_2$.

Demostración: Se sigue de **P2**.

P5 Tangentes a los círculos C_1 y C_2 en A_1 y B_2 forman ángulos iguales con la línea A_1B_2. Entonces si dichas tangentes se intersectan en F el triángulo FA_1B_2 es isósceles.

Demostración:



Como los triángulos HA_1O_1 y HA_2O_2 son semejantes, los triángulos isósceles $A_1O_1B_1$ y $A_2O_2B_2$ también lo son. Por lo tanto si l_1 y l_2 son las tangentes a los círculos C_1 y C_2 en A_1 y B_2, $\delta_1 = \prec l_1, A_1B_2$ y $\delta_2 = \prec l_2, A_1B_2$, entonces $\delta_1 = 90^0 - \prec O_1A_1B_1 = 90^0 - \prec O_2B_2A_2 = \delta_2$.

1.11.1 Ejercicios

1. Pruebe que si un círculo es tangente a dos círculos no concéntricos, los puntos de tangencia son puntos antihomólogos.

2. Pruebe las 5 propiedades para el centro de similitud k que es el que está en el segmento que une los centros.

1.12 Círculo de Similitud

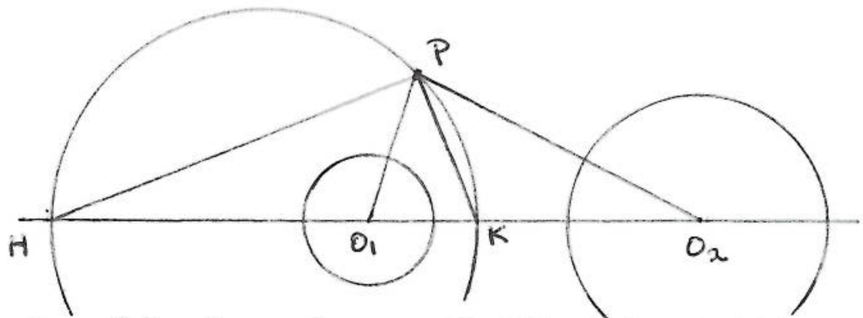
Vimos que dos círculos no concéntricos tienen dos puntos de homotecia o de similitud. Al círculo que tiene como diámetro el segmento que une los puntos de similitud de dos círculos se le conoce como círculo de similitud de dichos círculos. De la definición se sigue que el centro del círculo de similitud es colineal con los centros de los círculos dados.

Veremos dos formas de caracterizar al círculo de similitud de dos círculos no concéntricos.

Teorema 1.44 *El círculo de similitud de dos círculos no concéntricos es el lugar geométrico de los puntos tales que la razón de las distancias entre sus centros es igual a la razón entre sus radios.*

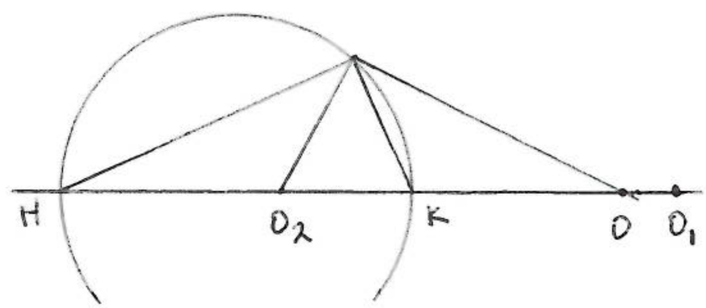
Demostración: Sean C_1 y C_2 dos círculos no concéntricos con centros O_1 y O_2 y radios r_1 y r_2, respectivamente y con centros de similitud H y K.

Supongamos primero que $r_1 \neq r_2$ y sea P un punto tal que $\frac{PO_1}{PO_2} = \frac{r_1}{r_2}$.



Como $\frac{O_1K}{KO_2} = \frac{r_1}{r_2}$, por el teorema 1.26, PK es la bisectriz del ángulo $\prec O_1PO_2$. Análogamente se obtiene que PH es la bisectriz del ángulo $\prec O_2PO_1$, es decir PK y PH son las bisectrices interior y exterior del ángulo en P en el triángulo O_1PO_2 y por lo tanto forman un ángulo recto. Esto prueba que P está en el círculo con diámetro HK, es decir en el círculo de similitud de C_1 y C_2.

Recíprocamente, supongamos que P está en el círculo de similitud de C_1 y C_2.



Sea O sobre la línea de los centros O_1O_2, tal que PK bisecte al ángulo $\prec O_2PO$. Como PK y PH son perpendiculares, bisectan interior y exteriormente al ángulo en P del triángulo O_2PO y entonces $\frac{OK}{KO_2} = -\frac{OH}{HO_2}$. Por otra parte, como H y K son los centros de similitud de los círculos C_1 y C_2, $\frac{O_1K}{KO_2} = -\frac{O_1H}{HO_2}$. Por lo tanto $\frac{HO}{OK} = \frac{HO_1}{O_1K}$, es decir O y O_1 dividen al segmento HK en la misma razón y por el lema 1.1 $O = O_1$ y entonces $\frac{PO_1}{PO_2} = \frac{O_1K}{KO_2} = \frac{r_1}{r_2}$.

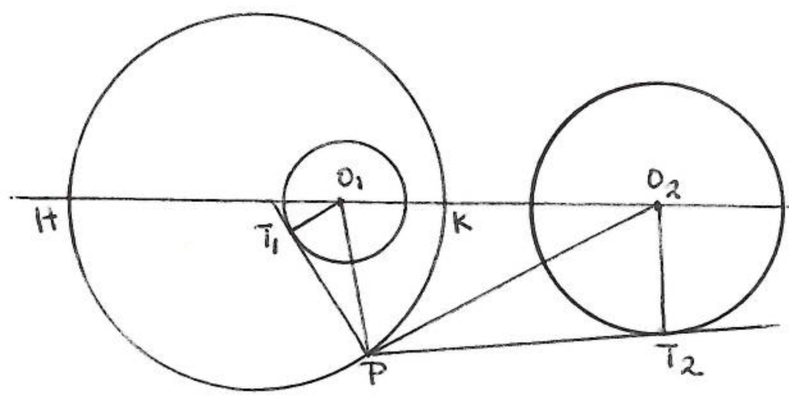
Si los dos círculos son iguales, es decir si $r_1 = r_2$, un punto de similitud es el punto medio del segmento que une sus centros y el otro es el punto al infinito de la línea de los centros y entonces su círculo de similitud degenera en la mediatriz del segmento que une los centros.

Decimos que α es el ángulo que un punto P subtiende al círculo C con centro O si α es el ángulo formado por una tangente a C que pase por P y la línea que une P con O.

Teorema 1.45 *El círculo de similitud de dos círculos no concéntricos es el lugar geométrico de los puntos tales que subtienden ángulos iguales a los dos círculos.*

Demostración: Sean C_1 y C_2 dos círculos no concéntricos con centros O_1 y O_2 y radios r_1 y r_2, respectivamente y con centros de similitud H y K.

Sea P un punto tal que $\prec O_1PT_1 = \prec T_2PO_2$, donde PT_1 y PT_2 son las tangentes a C_1 y C_2 como se muestran en la figura.



Como los triángulos O_1PT_1 y O_2PT_2 son rectángulos y $\prec O_1PT_1 = \prec T_2PO_2$, son semejantes; de donde $\frac{O_1P}{O_2P} = \frac{O_1T_1}{O_2T_2} = \frac{r_1}{r_2}$ y por el teorema 1.44 P está en el círculo de similitud.

Recíprocamente, si P está en el círculo de similitud, usando otra vez el teorema 1.44 obtenemos $\frac{O_1P}{O_2P} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{O_1T_1}{O_2T_2}$. Por lo tanto los triángulos O_1PT_1 y O_2PT_2 son semejantes y $\prec O_1PT_1 = \prec T_2PO_2$.

Como corolario del teorema 1.44 tenemos si O_1 y O_2 son dos puntos fijos cualesquiera y a y b son dos números positivos, tenemos que el conjunto de los puntos P tales que $\frac{PO_1}{PO_2} = \frac{a}{b}$ es un círculo. En efecto, si construimos los círculos con centros en O_1 y O_2 y radios a y b respectivamente, el conjunto deseado es justamente su círculo de similitud. A ese círculo se le conoce como círculo de Apolonio.

1.12.1 Ejercicios

1. Demuestre que el círculo de similitud de dos puntos que se intersectan pasa por los puntos de intersección.

2. Construya un triángulo dada su base, su altura y la razón de sus otros dos lados.

3. Si A es un punto cualquiera del círculo de similitud de dos círculos cuyos centros son O_1 y O_2, dibuje la línea AO_1 y en ella encuentre O_3 tal que $AO_3 = kAO_2$, para $k > 0$ dada. Dibuje el círculo con centro en O_3 y radio k veces el del círculo con centro en O_2. Pruebe que los círculos con centros en O_2 y O_3 son homotéticos con A como centro de similitud.

1.13 Ejercicios

1. Pruebe que el punto mediano del triángulo es el punto de trisección de cada mediana.

2. Sea $ABCD$ un rectángulo de lados 5 y 3 y E y F los puntos que dividen la diagonal AC en tres partes iguales. Encuentre el área del triángulo BEF.

3. En un triángulo ABC las medianas AM y CN sobre los lados BC y AB, respectivamente, se intersectan en el punto O. Si P es el punto medio del lado AC y MP intersecta a CN en el punto Q, encuentre el área del triángulo ABC en términos del área del triángulo OMQ.

4. Sea ABC un triángulo equilátero de lado s. Se inscribe un círculo en el triángulo y un cuadrado en el círculo. Encuentre el área del cuadrado.

5. Sea ABC el triángulo circunscrito a un círculo de radio r. Si el perímetro del triángulo ABC es p y el área es k, encuentre $\frac{p}{k}$ en términos de r.

6. Un triángulo equilátero y un hexágono regular tienen el mismo perímetro. Encuentre el área del hexágono si el área del triángulo es a.

7. Si un triángulo tiene área numéricamente igual al perímetro, encuentre el radio del círculo inscrito.

Bibliografía

[1] E. Antoniano "Geometría ¿para qué?". Editorial Limusa, 1984.

[2] C.T. Salkind and J.M. Earl "The contest problem book III, annual high school contests 1966-1972". The Mathematical Association of America, 1973.

[3] L.S. Shively "Introducción a la Geometría Moderna". CECSA, 1963.