Funciones
Rubén Pérez Palacios
18 de octubre de 2020

1. Definición

Es una relación entre dos conjuntos, digamos X y Y, de los que a cada elemento de X se le asigna un único elemento de Y. Su notación es la siguiente

Primero se indica sobre que conjuntos X y Y esta definida

$$f : X \to Y$$

Después se indica la regla de relación, es decir

$$x \in X, y \in Y, f(x) = y$$

Al conjunto X le llamamos el **dominio**, al conjunto Y le llamamos el **codominio** o **contradominio** y a la relación $f(x) = y$ **regla de correspondencia**.

2. Ejemplos

Las siguientes dos funciones pueden parecer muy simples, pero son muy importantes.

- **Función constante:**

  Son las funciones $f : X \to Y$ dadas por

  $$f(x) = b, x \in X, b \in Y \text{ fijo.}$$

- **Función identidad:**

  Son las funciones $f : X \to X$ dadas por

  $$f(x) = x, x \in X.$$

  Normalmente es denotada por $Id(x)$.

3. Operaciones

Apartir de dos funciones podemos generar otra función con una operación entre ellas.

- **Suma y resta:**

  Sean $f, g : X \to Y$ funciones. La suma y la resta estan definidas por

  $$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

- **Producto y Cociente:**

  Sean $f, g : X \to Y$ funciones. El producto esta definido por

  $$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

  y si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$ entonces el cociente esta definido por

  $$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

- **Composición:**

  Sean $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funciones. La composición esta definida por

  $$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

4. Propiedades

A las funciones se pueden caracterizar de diferentes formas, esto para poder apartir de ciertas características de una función encontrar propiedades de esta.

4.1. Dominio - Codominio

Sea $f : X \to Y$ una función

- **Inyectiva:**

  f es inyectiva si para todo $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \neq x_2$ entonces

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

- **Suprayectiva:**

  f es inyectiva si para todo $y \in Y$ existe un $x \in X$ tal que

$$f(x) = y.$$

- **Biyectiva:**

  f es biyectiva si es inyectiva y suprayectiva.

4.2. Paridad(signos)

Sea $f : X \to Y$ una función

- **Par:**

  f es par si

$$f(x) = f(-x).$$

- **Impar:**

  f es impar si

$$f(x) = -f(-x).$$

4.3. Periodicidad

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periodica si existe $a \neq 0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x+a) = f(x).$$

4.4. Orden

Sea $f : X \to Y$ una función, $x_1, x_2 \in X$.

- **Creciente:**

  Una función es creciente si $x_1 < x_2$ entonces

  $$f(x_1) < f(x_2).$$

- **Decreciente:**

  Una función es decreciente si $x_1 > x_2$

  $$f(x_1) > f(x_2).$$

- **No Creciente:**

  Una función es no creciente si $x_1 \geq x_2$ entonces

  $$f(x_1) \geq f(x_2).$$

- **No Decreciente:**

  Una función es decreciente si $x_1 \leq x_2$

  $$f(x_1) \leq f(x_2).$$

4.5. Acotadas

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. La función f es acotada si existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$|f(x)| \leq M.$$

5. Ecuaciones Funcionales

Las ecuaciones funcionales son aquellas ecuaciones cuya incógnita es una función. El objetivo de estos problemos puede ser determinar la función que cumple una ecuación o determinar propiedades de una función que cumple una ecuación.

Ejercicio 5.1. *Encuentra todas las funciones* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *tales que*

$$f(y+x)-f(y-x)=4yx,\ \textit{para todos}\ x,y\in\mathbb{R}.$$

Ejercicio 5.2. *Encuentra todas las funciones* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *tales que*

$$f(x+y)-f(x-y)=f(x)+6xy^2+x^3,\ \textit{para todos}\ x,y\in\mathbb{R}.$$

Ejercicio 5.3. *Encuentra todas las funciones* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *tales que*

$$(m^2+f(n))|(mf(m)+n),\ \textit{para todos}\ n,m\in\mathbb{N}.$$

Ejercicio 5.4. *Las funciones* $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ *que satisfacen*

$$f(xf(y))=\frac{f(x)}{y},\ \textit{para todos}\ x,y\in\mathbb{Q}^+.$$

Ejercicio 5.5. *Encuentra todas las funciones* $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ *tales que*

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y),\ \textit{para todos}\ x,y\in\mathbb{Q}.$$

Ejercicio 5.6. *Considera la una función* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *tal que*

$$f(n)=f(n+f(n)),\ \textit{para toda}\ n\in\mathbb{N}.$$

Demuestre que si la imagen de d *es finita entonces* f *es periódica.*

Ejercicio 5.7. *Encuentra todas las funciones* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *tales que*

$$f(x^2+f(y))=y+f(x)^2,\ \textit{para todos}\ x,y\in\mathbb{R}.$$

Ejercicio 5.8. *Sea* $m\geq 2$ *un número entero. Encuentra todas las funciones* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *tales que*

$$f(x)=\frac{1}{m^2}\left\{f(0)+f\left(\frac{x}{m}\right)+f\left(\frac{2x}{m}\right)\right\}+\cdots+f\left(\frac{(m-1)x}{m}\right),\ \textit{para todo}\ x\in[0,1].$$

5.1. Recomendaciones paara resolver ecuaciones funcionales

Hay ciertas formas de atacar estos tipos de problemas, que pueden ser muy distintas entre ellas, y también complicadas. Por lo que daremos una serie de recomendaciones para atacar estos problemas.

- **Sustituir variables por valores**
- **Inducción matemática**
- **Propiedades básicas de las funciones**
- **Sustituciones**
- **Simetría en las variables**
- **Comprobación**

5.2. Ejercicios