

1. Definición

Es una relación entre dos conjuntos, digamos X y Y , de los que a cada elemento de X se le asigna un único elemento de Y . Su notación es la siguiente

Primero se indica sobre que conjuntos X y Y esta definida

$$f : X \rightarrow Y$$

Después se indica la regla de relación, es decir

$$x \in X, y \in Y, f(x) = y$$

Al conjunto X le llamamos el **dominio**, al conjunto Y le llamamos el **codominio** o **contradominio** y a la relación $f(x) = y$ **regla de correspondencia**.

2. Ejemplos

Las siguientes dos funciones pueden parecer muy simples, pero son muy importantes.

- **Función constante:**

Son las funciones $f : X \rightarrow Y$ dadas por

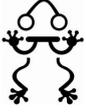
$$f(x) = b, x \in X, b \in Y \text{ fijo.}$$

- **Función identidad:**

Son las funciones $f : X \rightarrow X$ dadas por

$$f(x) = x, x \in X.$$

Normalmente es denotada por $Id(x)$.



3. Operaciones

Apartir de dos funciones podemos generar otra función con una operación entre ellas.

- **Suma y resta:**

Sean $f, g : X \rightarrow Y$ funciones. La suma y la resta están definidas por

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

- **Producto y Cociente:**

Sean $f, g : X \rightarrow Y$ funciones. El producto está definido por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

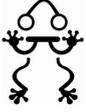
y si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$ entonces el cociente está definido por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

- **Composición:**

Sean $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ funciones. La composición está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$



4. Propiedades

A las funciones se pueden caracterizar de diferentes formas, esto para poder apartir de ciertas características de una función encontrar propiedades de esta.

4.1. Dominio - Codominio

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función

- **Inyectiva:**

f es inyectiva si para todo $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \neq x_2$ entonces

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

- **Suprayectiva:**

f es inyectiva si para todo $y \in Y$ existe un $x \in X$ tal que

$$f(x) = y.$$

- **Biyectiva:**

f es biyectiva si es inyectiva y suprayectiva.

4.2. Paridad(signos)

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función

- **Par:**

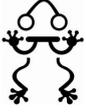
f es par si

$$f(x) = f(-x).$$

- **Impar:**

f es impar si

$$f(x) = -f(-x).$$



4.3. Periodicidad

Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es periódica si existe $a \neq 0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x + a) = f(x).$$

4.4. Orden

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función, $x_1, x_2 \in X$.

■ **Creciente:**

Una función es creciente si $x_1 < x_2$ entonces

$$f(x_1) < f(x_2).$$

■ **Decreciente:**

Una función es decreciente si $x_1 > x_2$

$$f(x_1) > f(x_2).$$

■ **No Creciente:**

Una función es no creciente si $x_1 \geq x_2$ entonces

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

■ **No Decreciente:**

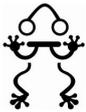
Una función es decreciente si $x_1 \leq x_2$

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

4.5. Acotadas

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. La función f es acotada si existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$|f(x)| \leq M.$$



5. Ecuaciones Funcionales

Las ecuaciones funcionales son aquellas ecuaciones cuya incógnita es una función. El objetivo de estos problemas puede ser determinar la función que cumple una ecuación o determinar propiedades de una función que cumple una ecuación.

Ejercicio 5.1. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f(y+x) - f(y-x) = 4yx, \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 5.2. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f(x+y) - f(x-y) = f(x) + 6xy^2 + x^3, \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 5.3. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tales que

$$(m^2 + f(n)) \mid (mf(m) + n), \text{ para todos } n, m \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 5.4. Las funciones $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ que satisfacen

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}, \text{ para todos } x, y \in \mathbb{Q}^+.$$

Ejercicio 5.5. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ tales que

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y), \text{ para todos } x, y \in \mathbb{Q}.$$

Ejercicio 5.6. Considera la una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$f(n) = f(n + f(n)), \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

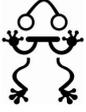
Demuestre que si la imagen de d es finita entonces f es periódica.

Ejercicio 5.7. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2, \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 5.8. Sea $m \geq 2$ un número entero. Encuentra todas las funciones $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = \frac{1}{m^2} \left\{ f(0) + f\left(\frac{x}{m}\right) + f\left(\frac{2x}{m}\right) \right\} + \dots + f\left(\frac{(m-1)x}{m}\right), \text{ para todo } x \in [0, 1].$$



5.1. Recomendaciones paara resolver ecuaciones funcionales

Hay ciertas formas de atacar estos tipos de problemas, que pueden ser muy distintas entre ellas, y también complicadas. Por lo que daremos una serie de recomendaciones para atacar estos problemas.

- Sustituir variables por valores
- Inducción matemática
- Propiedades básicas de las funciones
- Sustituciones
- Simetría en las variables
- Comprobación

5.2. Ejercicios