ECUACIONES LÍNEALES

Elías Loyola Campos

1. Antes de empezar

En estas notas te daremos los conceptos básicos de las ecuaciones de primer grado. En el desarrollo del texto planteamos algunos problemas y ejercicios. Al final vienen las soluciones de los problemas y en algunos casos, sin lugar a dudas, te darán otra visión para resolverlos.

En este texto, las variables que consideraremos serán números reales. Una ecuación es una igualdad que se cumple sólo para algunos valores de las variables. Las ecuaciones donde los términos tienen variables en primer grado (exponente 1) se conocen como lineales. Claro, las más sencillas sólo tienen una incógnita. Por ejemplo:

a) $2x = 2$ tiene una solución, que es $x = 1$, es decir, el conjunto solución es {1}.

b) $3x + 1 = x + 2x$ no tiene solución en este caso decimos que el conjunto solución es { }, esto es el conjunto vacío también puede escribirse como ∅.

c) $|x - 3| = 1$ tiene dos soluciones y su conjunto solución es {2, 4}

d) La igualdad $2x = x + x$ no es estrictamente una ecuación pues cualquier valor de la variable satisface la igualdad. A estas igualdades les llamamos identidades.

e) Un ejemplo de ecuación con una infinidad de soluciones es $sen\, x = 0$, aunque en este caso no es lineal sino trigonométrica, y el conjunto solución es {…-3π, -2π, -π, 0, π, 2π, 3π,…}, se cumple para una infinidad de valores, pero no para cualquier valor de x, sólo para ésos.

El asunto importante para resolver ecuaciones es que

> *Si a ambos miembros de una igualdad les efectuamos la misma operación esta relación de igualdad no se altera*.

2. Ecuaciones de primer grado con una incógnita

La expresión general de una ecuación de primer grado es $Ax = B$, donde A y B son números reales (constantes).

La solución, si A no es cero[1], es $x = B/A$. Por ejemplo[2], si x es solución de $-3x = 4$ entonces podemos dividir ambos miembros de la igualdad entre -3 y x es solución de $-3x/(-3) = 4/(-3)$. Al simplificar se obtiene que el valor buscado de x es $x = -4/3$.
Enseguida tenemos que comprobar, mediante la sustitución del valor de x en la ecuación original, si ésta igualdad se cumple.
Comprobemos que efectivamente $x = -4/3$ es la solución buscada que $-3x = 4$ es una igualdad válida cuando x toma el valor $-4/3$. Ahora bien, si $x = -4/3$, entonces $-3x = -3(-4/3) = 4$, como queríamos comprobar.

La comprobación siempre es un factor importante en matemáticas, durante todos los pasos que hacemos, no sólo al final.

Resolvamos ahora la ecuación $\frac{-1}{4}x + 3 = \frac{-1}{5}x + \frac{5}{3}$.

Restando 3 a ambos miembros de la ecuación: $\frac{-1}{4}x + 3 - 3 = \frac{-1}{5}x + \frac{5}{3} - 3$ se obtiene la ecuación $\frac{-1}{4}x = \frac{-1}{5}x - \frac{4}{3}$. Ahora sumamos $\frac{1}{5}x$ en ambos miembros $\frac{-1}{4}x + \frac{1}{5}x = \frac{-1}{5}x - \frac{4}{3} + \frac{1}{5}x$ la ecuación resultante es $\frac{-1}{20}x = -\frac{4}{3}$. Multiplicando ambos miembros por -20 se tiene que $(-20)\frac{-1}{20}x = (-20)(-\frac{4}{3})$, $x = \frac{80}{3}$.

Comprobamos que es solución sustituyendo el valor en la ecuación original.

$\frac{-1}{4}\left(\frac{80}{3}\right) + 3 = \frac{-1}{5}\left(\frac{80}{3}\right) + \frac{5}{3} \;\therefore\; \frac{-80}{12} + 3 = \frac{-80}{15} + \frac{5}{3} \;\therefore\; \frac{-44}{12} = \frac{-55}{15} \;\therefore\; \frac{-11}{3} = \frac{-11}{3}$

Concluimos que $x = \frac{80}{3}$ es solución de la ecuación $\frac{-1}{4}x + 3 = \frac{-1}{5}x + \frac{5}{3}$.

Resuelve y (obviamente) comprueba las ecuaciones siguientes:

1. $\frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{3}(x-3) + \frac{1}{4}(x-4) = 4$
2. $\frac{1}{3}(x-3) - \frac{1}{4}(x-8) + \frac{1}{5}(x-5) = 0$
3. $a(x-a) = b(x-b),\ a \neq b$
4. $(x+a)(x+b) - (x-a)(x-b) = (a+b)^2,\ a+b \neq 0$
5. $a(2x-a) + b(2x-b) = 2ab,\ a+b \neq 0$
6. $(a^2+x)(b^2+x) = (ab+x)^2,\ a^2+b^2 \neq 0$
7. $3(x+3)^2 + 5(x+5)^2 = 8(x+8)^2$
8. $(x+a)^4 - (x-a)^4 - 8ax^3 + 8a^4 = 0,\ a \neq 0$

[1] Esto lo enfatizamos porque no se puede dividir entre cero. (Ya lo dice el “onceavo mandamiento: No dividirás entre cero”.)
[2] Estos ejemplos, y los ejercicios del 1 al 12 de ecuaciones de primer grado están tomados de Álgebra. Notas y ejercicios de Óscar Dávalos Orozco *et al* de la Universidad Panamericana (sin fecha).

9. $(x-1)^3+x^3+(x+1)^3=3x(x^2-1)$
10. $(x+a)^3+(x+b)^3+(x+c)^3=3(x+a)(x+b)(x+c)$

En ocasiones, lo que queremos saber es el resultado de una expresión, aunque no nos importe el valor de cada término o incógnita.

Por ejemplo, Si $x+a=x^2+3$ y $x+b=x^2-5$, ¿cuánto vale $a-b$?

Al primer vistazo nos damos cuenta que lo buscado se obtiene restando las dos ecuaciones, al primer miembro de la primera ecuación le restamos el primer miembro de la segunda

$x+a-(x+b)=a-b$, pero esta diferencia debe ser la misma que obtenemos si al segundo miembro de la primera ecuación le restamos el segundo miembro de la segunda, esto es

$x^2+3-(x^2-5)=8$. Así, $a-b=8$. ¿Y la x? *Saaabe*, nos pedían el valor de $a-b$, pero seguramente, si reflexionas un poco, podrás saber qué pasa con la x.

11. Calcula $a+b+c$ si $\frac{a}{4-a}=\frac{b}{5-b}=\frac{c}{7-c}=3$

En otras ocasiones, puede parecer que faltan datos, sin embargo, nos dan limitantes que permiten encontrar las soluciones. Por ejemplo, si tienes \$12 y requieres comprar plumas y lápices, pero cada pluma cuesta \$5 y los lápices cuestan \$3. ¿Cuántos lápices y cuántas plumas puedes comprar si al menos necesitas uno de cada uno? Es obvio que al menos gastarás \$8 y te sobrarán \$4 con lo que puedes adquirir un lápiz más y te sobrará \$1 ya que no puedes comprar fracciones de lápiz ni de pluma, es decir, los resultados deben ser enteros.

12. $2^{x+1}+2^x=3^{y+2}-3^y$, donde tanto x como y son números enteros, calcula el valor de cada incógnita.

Un asunto importante del uso del álgebra es poseer un lenguaje preciso para poder resolver algunos problemas. El álgebra es muy útil, lo único que necesitamos es traducir nuestras expresiones verbales en expresiones algebraicas. Escribir el significado de cada expresión o variable ayuda mucho. A veces no basta con decir “ya lo pensé, ya sé que trata cada cosa, ¿para qué la escribo?” Puede ser que seas muy bueno pensando, pero si tienes algún error y no llegas al resultado, el profesor no tendrá elementos suficientes para encontrar en dónde estuvieron tus fallas. En el caso de las competencias de matemáticas, se suelen dar algunos puntos parciales, aunque no llegues al resultado final, el chiste está en explicar (y explicarte a ti mismo) cómo vas a resolver el problema. Claro que para poder hacerlo es necesario que hayas comprendido el problema y que hayas entendido qué hacer con los datos que se te dieron; si esto lo escribes, el profesor entenderá que estabas buscando y cuáles de tus ideas son relevantes y sí pueden llevarte a la solución, además de ayudarte a entender los yerros.

Vamos a poner unos problemas para desarrollar estas ideas.

Estoy pensando un número. Si lo multiplico por 4 y le resto 8 me da el mismo resultado que si le sumo 7. ¿Cuál es ese número?

Sí, ya sé que está muy fácil, pero nos servirá para iniciar con las ideas. Aquí sólo hay una incógnita: el número pensado. Representémosla con una letra, por ejemplo x. Pero escribámoslo.

x = número pensado.

Así mismo, hay dos expresiones verbales que están relacionadas por una igualdad ("me da el mismo resultado"), la primera es "Si lo multiplico por 4 y le resto 8" (está hablando del número), se puede expresar como $4x - 8$; la segunda expresión verbal es "si le sumo 7" (está hablando del mismo número) se expresa como $x + 7$. Ambas expresiones están relacionadas mediante una igualdad, entonces $4x - 8 = x + 7$ da la ecuación que debe resolverse para encontrar la incógnita.

Al resolverla, se tiene que $x = 5$. Sí, debes comprobarlo en tu ecuación, pero más importante aún es comprobarlo en tu problema: a 5 lo multiplicas por 4, te da 20, y le restas 8, te da 12; que debe ser lo mismo que si a 5 le sumas 7, ¡te da 12!, sí da lo mismo.

Otro sencillo: La edad de Cristina es cuatro veces la edad de Roberto, pero dentro de 20 años sólo será el doble. ¿Qué edades tiene cada uno?

Sí, aquí hay dos incógnitas, pero están relacionadas verbalmente como "La edad de Cristina es cuatro veces la edad de Roberto", así que es posible usar sólo una incógnita, ¿cuál será más conveniente?

Si mi incógnita es la edad de Cristina (x = edad de Cristina), la edad de Roberto habrá de representarse como $x/4$.

En cambio, si mi incógnita es la edad de Roberto (y = edad de Roberto), entonces la edad de Cristina habrá de representarse como $4y$.

Con cualquiera de los dos caminos se puede resolver el problema, pero las fracciones suelen causar más problemas que cuando no las usamos. Por tanto es más cómoda la segunda. Así:

y = edad actual de Roberto

$4y$ = edad actual de Cristina

El problema da otra expresión verbal que señala otra igualdad: "dentro de 20 años sólo será el doble" es decir "dentro de 20 años (la edad de Cristina) sólo será el doble (que la edad de Roberto). Aquí se requiere precisar cuáles serán las edades de cada uno dentro de 20 años:

$y + 20$ = edad de Roberto dentro de 20 años

$4y + 20$ = edad de Cristina dentro de 20 años

y la igualdad que establece la ecuación a resolver es que dentro de 20 años (la edad de Cristina) sólo será el doble (que la edad de Roberto) es decir

$4y + 20 = 2(y + 20)$

Se resuelve esta ecuación, se comprueba el resultado, se establecen las edades actuales y las que tendrán en 20 años y se comprueba esto en el enunciado del problema.

$y = 10$, edad de Roberto

$4y = 40$ edad de Cristina

$y + 20 = 30$ edad de Roberto dentro de 20 años

$4y + 20 = 60$ edad de Cristina dentro de 20 años

Sí, Cristina tiene cuatro veces la edad de Roberto, y dentro de 20 años la edad de ella será el doble que la edad de él.

13. ¿Cuál sería la ecuación si hubiésemos elegido la primera opción?

Ahora va uno para probarnos el método:[3]

"Un equipo de segadores debía segar dos prados, uno tenía doble superficie que otro. Durante medio día trabajó todo el personal del equipo en el prado grande; después de la comida, una mitad de la gente quedó en el prado grande; y la otra mitad trabajó en el pequeño. Durante esa tarde fueron terminados los dos tajos, a excepción de un reducido sector del prado pequeño, cuya siega ocupó el día siguiente completo a un solo segador. ¿Con cuántos segadores contaba el equipo?"

En este problema, la incógnita fundamental es el número de segadores:

x = número de segadores

También se habla de dos prados que habrán de segarse, y que uno es el doble del otro, y de la manera en que los siegan, considerando la jornada diaria pero no parece que podamos relacionarlos fácilmente. Lo interesante es que se nos puede aclarar el asunto si introducimos una incógnita más, que seguramente no sabremos cuánto vale, así como no sabemos, ni interesa, el tamaño de los prados, pero será muy conveniente ponerla: la superficie del sector segado por un trabajador en un solo día (más precisamente, se refiere a la fracción del total de los prados que un trabajador en un solo día). La expresamos con la y:

y = Superficie que siega un trabajador en una jornada diaria.

Aunque el problema no exige que se halle su valor (ni la podemos encontrar en unidades de superficie, en tanto que ignoramos el área de los prados) sí contribuye a encontrar el valor de la x pues el producto xy será lo que todo el equipo segó en un día. Seguramente ya te diste cuenta que $xy + y$ es el total que suman los dos prados pues todos (x) trabajaron un día completo y sólo les faltó la parte que un trabajador hizo al día siguiente, es decir faltaba y de segar.

Representemos la superficie del prado grande con estas dos incógnitas. El trabajo se hizo en dos partes:

---

[3] Perelman, Yakov. Álgebra Recreativa (http://www.librosmaravillosos.com/algebrarecreativa/index.html) Arriba a la izquierda en "Menú" (≡ Menú)puedes descargar el formato de tu preferencia (PDF, EPUB o MOBI).

En la primera parte todos (x) trabajaron, pero sólo $y/2$ cada quien, porque fue medio día, es decir, la primera mitad del día se segó $(x)(y/2) = xy/2$.

Durante la segunda parte del día trabajó allí la mitad del equipo, es decir, trabajaron $x/2$ personas y cada quién segó $y/2$, porque fue medio día, es decir en esa segunda parte se segó $(x/2)(y/2) = xy/4$.

Puesto que al final de la jornada había sido segado todo el prado grande, su área es la suma de lo segado en la mañana, más lo segado en la tarde: $\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4}$.

Expresamos ahora la superficie del prado menor con las dos incógnitas. Durante medio día se ocuparon en él $x/2$ trabajadores y cada uno de los cuales segó $y/2$, porque fue medio día, es decir, segaron una superficie $\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{xy}{4}$, pero faltó un pedazo que equivale a $1y$, es decir a y, pues un solo trabajador lo hizo al día siguiente; lo cual tendremos que sumar para encontrar la superficie del prado chico: $\left(\frac{xy}{4}\right) + y$.

Antes de continuar, constatamos que, durante todo el día, lo segado en el prado grande ($\frac{3xy}{4}$), más lo segado en el prado chico ($\frac{xy}{4}$) es lo que todo el equipo siega en un día (xy). Esto sólo es una advertencia de que vamos bien, es decir, es parte de las comprobaciones continuas que debemos acostumbrarnos a hacer cuando usamos el álgebra.

Solamente nos queda traducir al idioma del álgebra la frase “el primer prado tiene doble superficie que el segundo”, y la ecuación quedará establecida como sigue: $\frac{\frac{3xy}{4}}{\frac{xy}{4}+y} = 2$, la cual efectuando las operaciones fraccionarias da $\frac{3xy}{xy+4y} = 2$ que se simplifica al dividir entre y, quedando $\frac{3x}{x+4} = 2$, cuya solución es $x = 8$. En el equipo había 8 segadores.

14. Aún queda pendiente la comprobación en el enunciado del problema. Efectúala. Quizá se te facilite hacer un dibujo donde se aprecie lo que hizo cada quien.
15. Tengo una sandía que pesa 10 kg, de los cuales 99% es agua. Después de cierto tiempo al sol, se evaporó parte del agua hasta quedar la fruta con 98% de agua. ¿Cuál es ahora el peso de mi fruta?

3. Vídeo de vital importancia

Por si quieres un pequeño respiro y ya hiciste los ejercicios puedes revisar el siguiente vídeo con una pequeña capsula de ADN40 sobre la ceremonia de premiación del concurso nacional de la OMM 2019:

https://youtu.be/zNGh6F521FE

4. Ecuaciones de primer grado con más de una incógnita.

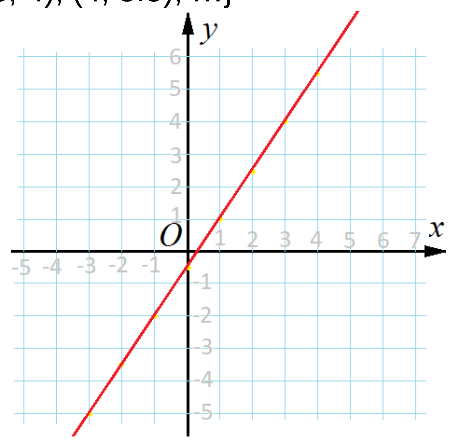
Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas que consideraremos son de la forma (o bien, siempre se pueden poner de esa forma):

$$Ax + By = C$$

donde A, B y C son números reales (constantes), por ejemplo, $3x - 2y = 1$. Sus soluciones son parejas ordenadas de números reales, en este caso hay una infinidad de soluciones, basta darle un valor cualquiera a una de las variables (por ejemplo, sustituir $x = 3$) y obtener un valor (despejando, claro, $y = 4$):

{…, (-3, -5), (-2, -3.5), (-1, -2), (0, -1/2), (1, 1), (2, 2.5), (3, 4), (4, 5.5), …}

y el conjunto solución pertenece al conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Es obvio que no cualquier pareja ordenada es solución de esta ecuación, por ejemplo, el origen *O*(0, 0) no satisface la ecuación.



Claro, las variables pueden ser *u*, *v*, *w*, *z*… ¡como quieras llamarlas!, pero sólo dos. Estas ecuaciones representan a un conjunto del plano. Al graficarlos en éste se obtiene una recta. Todos los puntos que están sobre la recta son solución de la ecuación y viceversa, todas las parejas ordenadas que satisfacen la ecuación son puntos de la recta.

El modelo de ecuación $Ax + By = C$ representa a todas las posibles rectas en el plano, particularmente cuando alguno de los parámetros A, B o C vale cero… "¡Momento! ¿Qué es eso de *parámetros*?", interviene gritando confundido un lector, "Si ya habíamos dicho que A, B y C eran constantes y las otras dos (x y y) son variables y sales con una palabreja nueva para referirte a algo que ya habías mencionado."

Perdón, sí, señalé que A, B y C son constantes. Sin embargo, puede ser *cualquier* constante. Para cada terna de valores constantes que les demos a A, B y C tendremos una ecuación, y si alguna terna es distinta de otra se tratará de distintas ecuaciones, salvo un detalle al que nos referiremos más adelante; al definir los valores de las constantes, determinamos de manera única a la ecuación. En tanto que en el modelo las colocamos con letras y les llamamos parámetros.

Retomo el hilo de lo que estaba diciendo: cuando alguno de los parámetros A, B o C vale cero hay situaciones muy importantes en cada caso.

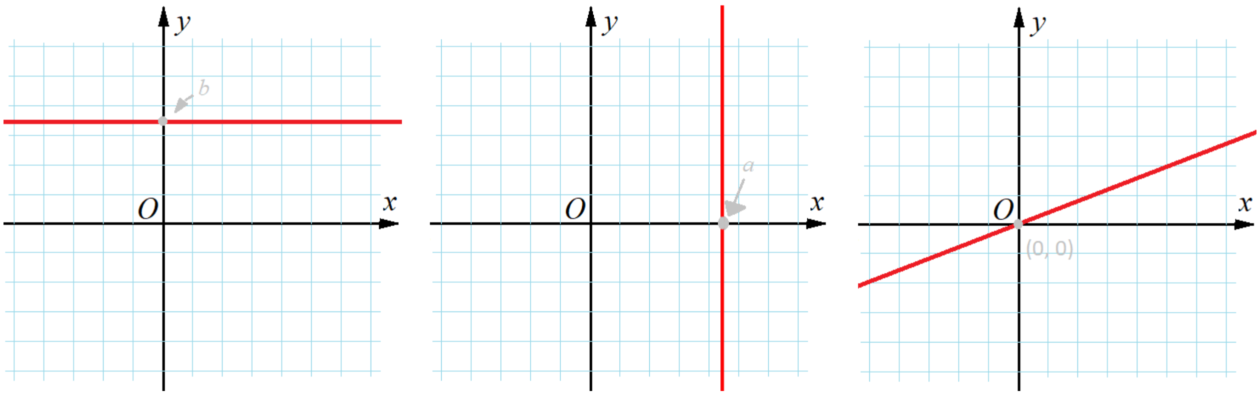
a) Si A vale cero, la gráfica de la ecuación es una recta horizontal. Esto significa, en el modelo, $0x + By = C$ que no importará el valor que le demos a x (pues habrá de multiplicarse por 0 y el producto será 0) la *y* siempre tendrá el valor C/B que llamaremos b, esto es $C/B = 4$.[4]

b) Si B vale cero, la gráfica de la ecuación es una recta vertical. Esto significa, en el modelo, $Ax + 0y = C$ que no importará el valor que le demos a y (pues habrá de

[4] Para ir con la notación más difundida.

multiplicarse por 0 y el producto será 0) la x siempre tendrá el valor C/A que llamaremos a, esto es $C/A = a$.

c) Si C vale cero, la ecuación es $Ax + By = 0$ y su gráfica es una recta que pasa por el origen, no importa cuánto valgan A y B.



$0x + By = C$ $\quad$ $Ax + 0y = C$ $\quad$ $Ax + By = 0$

Ahora sigue la aclaración del detalle para las ternas A, B y C distintas que dejamos pendiente. Trabajamos ya con la ecuación $3x - 2y = 1$ y la respectiva terna de parámetros es 3, -2 y 1. Sin embargo, si multiplicamos ambos términos de la ecuación por un número cualquiera, por ejemplo -2, se obtiene $-6x + 4y = -2$, pero se refiere a la misma ecuación. Es decir, el conjunto solución será el mismo (puedes darle valores a una de las variables y obtendrás para la otra los que ya habíamos calculado). En otras palabras, el modelo lineal sólo tiene dos parámetros que lo definen y no tres. Supongamos que C no es cero, entonces podemos dividir entre C al modelo $Ax + By = C$ y nos quedará como $\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y = 1$, es decir $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (pues ya dijimos que $\frac{A}{C} = \frac{1}{a}$ y que $\frac{B}{C} = \frac{1}{b}$), a esta ecuación se le conoce como ecuación canónica de la recta.[5]

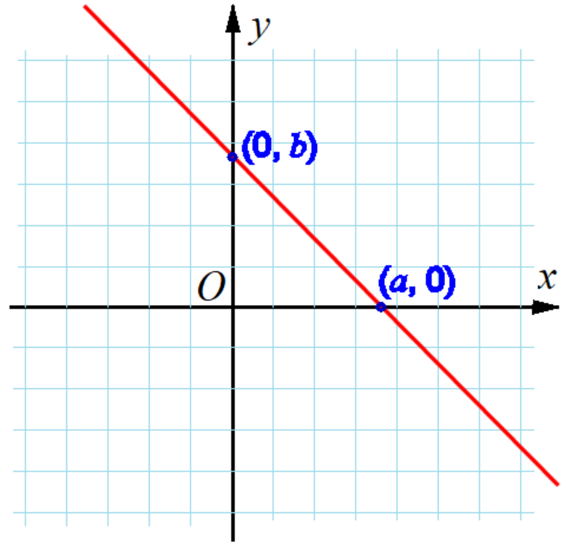
[5] También se conoce como ecuación segmentaria de la recta, pues los parámetros que la definen son los segmentos del origen a donde la recta corta a los ejes de coordenadas: *a* es la “abscisa al origen” y *b* es la “ordenada al origen”.

La distancia que hay del origen al punto donde la recta corta al eje de las abscisas se llama “abscisa al origen” y se representa con la letra a.

Asimismo, la distancia que hay del origen al punto donde la recta corta al eje de las ordenadas se llama “ordenada al origen” y se representa con la letra b.

Es decir, si sabemos los valores de a y b entonces podemos escribir la ecuación de la recta fácilmente.

Como vemos en la gráfica, los puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas son dos, por eso bastan esos valores para trazar la recta.



¿Cómo podemos saber la ecuación lineal que representa a un determinado modelo? Si tenemos las coordenadas de dos puntos, es decir, las parejas ordenadas de dos valores que cumplen la ecuación, eso es muy fácil ya que sabemos que por dos puntos pasa una única recta, por tanto, esos dos puntos la definen completamente. Por ejemplo, sabemos que las mediciones de temperatura con grados Centígrados y con grados Fahrenheit siguen un modelo lineal $ax + by = c$; sabemos también que la escala de grados Centígrados establece como las temperaturas de congelación y ebullición del agua, 0 ºC y 100 ºC, respectivamente, y que en la de grados Fahrenheit dichas temperaturas equivalen a 32 °F y 212 °F, respectivamente.

Para encontrar la ecuación que relaciona una escala con la otra, consideremos a la variable x como los grados Centígrados y a la variable y como los grados Fahrenheit. Entonces los datos que tenemos son las coordenadas de los puntos (0, 32) y (100, 212), los cuales deben satisfacer la ecuación, la cual podemos simplificar como $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Además, ya tenemos la ordenada al origen: $b = 32$, pues si sustituimos el punto (0, 32), es decir $x = 0$ y $y = 32$ nos da inmediatamente el valor de b; sólo falta encontrar el valor de a; para ello sustituyamos los valores de las variables con los del otro punto y el asunto estará resuelto.

16. Da la ecuación del modelo lineal del cambio de escalas de grados Centígrados a grados Fahrenheit. (Recuerda que las soluciones vienen al final.)
17. ¿En qué temperatura coinciden las dos escalas de temperatura, la Fahrenheit y la Centígrada?
18. ¿Cuánto debe valer k si la ecuación $2x + 5ky + 8 = 0$ tiene como una de sus soluciones al punto (3, -1)?

5. Sistemas de ecuaciones lineales

El problema más frecuente es: dadas dos rectas, encontrar las coordenadas donde éstas se cortan. Es lo mismo que decir: resolver el sistema de dos ecuaciones lineales, con dos incógnitas.

Hay varios métodos para resolver el sistema. El más usado es el de *reducción*. El nombre se le da debido a que el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es reducido a una sola ecuación con una incógnita, la cual ya se sabe resolver.

Mostrémoslo con un ejemplo. Resolver el sistema: $3x + 1 = -4y$; $y - 17 = 5x$. Lo primero que hay que hacer es acomodar los términos de ambas incógnitas en uno de los miembros de la ecuación, y los términos independientes (los que no tienen incógnitas) en el otro miembro. Es muy conveniente acomodar a las incógnitas en el mismo orden (por ejemplo, alfabético). Así,

$$3x + 4y = -1$$

$$-5x + y = 17$$

Ahora, verificar que la incógnita de la que nos desharemos tenga distinto signo en las ecuaciones. En este caso, la incógnita x ya está con distinto signo en cada ecuación.

El siguiente paso es multiplicar la primera ecuación por el coeficiente absoluto (sin considerar el signo) de la segunda, y multiplicar la segunda ecuación por el coeficiente absoluto (sin considerar el signo) de la primera. En este caso

$3x + 4y = -1$ se multiplica por 5 y da $15x + 20y = -5$

$-5x + y = 17$ se multiplica por 3 y da $-15x + 3y = 51$

Una vez que se hizo esto, observarás que, si sumamos las ecuaciones obtenidas, se eliminarán los términos que contienen a la incógnita x, y de la suma obtendremos $23y = 46$, que sólo tiene una incógnita, cuya solución es $y = 46/23$, es decir, $y = 2$.

Para encontrar el valor de la otra incógnita podemos sustituir el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones originales y despejar la incógnita faltante. Pero usemos el método de reducción para practicarlo.

Como queremos eliminar a la incógnita y, verificamos los signos de los coeficientes. En este caso son iguales, así que a una de las ecuaciones (la que sea, por ejemplo, a la segunda) habrá que cambiarle el signo y el sistema quedará

$$-3x - 4y = 1$$

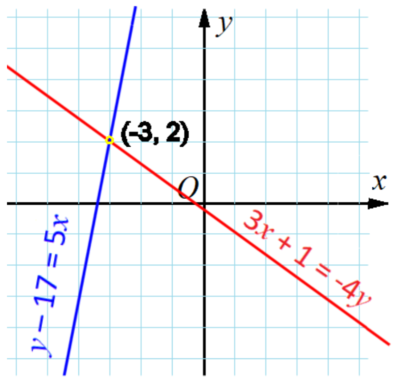
$$-5x + y = 17$$

El siguiente paso es multiplicar la primera ecuación por el coeficiente absoluto (sin considerar el signo) de la segunda, y multiplicar la segunda ecuación por el coeficiente absoluto (sin considerar el signo) de la primera. En este caso

$-3x - 4y = 1$ se multiplica por 1 y da $-3x - 4y = 1$

$-5x + y = 17$ se multiplica por 4 y da $-20x + 4y = 68$

Sumamos las ecuaciones y obtenemos $-23x = 69$, que sólo tiene una incógnita, cuya solución es $y - 69/23$, es decir, $x = -3$. Así, la solución es (-3, 2), las rectas se cortan en ese punto.



19. Mediante el método de reducción, resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones y, cuando tengas el resultado, compruébalos sustituyéndolos en las ecuaciones originales:
    a. $4x = 10 - 2y$; $3y - 7x - 15 = 0$
    b. $4u + v = 0$; $3u - 2 = v$
    c. $w/3 - z/6 = 0$; $4w + z = 5$
    d. $3m + 2n = 4$; $2m + 2n = 3$

La razón de la comprobación es obvia. Sin embargo, te diré que somos muy propensos a cometer errores y mientras más practiquemos, menos errores cometeremos, ya que nos iremos fijando en dónde poner más atención. (Benditas las máquinas que, bien programadas, no se equivocan.)

(Este paréntesis es pertinente. El símil es el de operar con fluidez las tablas de sumar, restar o multiplicar para no perder el tiempo deduciendo el resultado en cada operación aritmética necesaria. Afortunadamente las calculadoras nos permiten hacer estas operaciones con la única condición de que apachurremos bien las teclas y que estemos advertidos del resultado aproximado que esperaremos. Por ejemplo, si quieres efectuar la multiplicación de 2 × 11 y la calculadora te muestra como resultado 2048, es evidente que está mal y habrás tecleado algo de manera errónea, la tecla $\boxed{x^y}$. Si haces 11 + 5 y obtienes 2.2 es que apachurraste la tecla $\boxed{\div}$ en lugar de $\boxed{+}$. También hay calculadoras que resuelven ecuaciones y sistemas de ecuaciones, pero hay que saber usarlas al igual que las aplicaciones gráficas, por ejemplo, *Geogebra*. Además, en las olimpiadas de matemáticas NO está permitido el uso de calculadoras.)

Otro método en el que se hace énfasis es en el de *sustitución*. La razón importante de la insistencia se debe a que, en muchos casos de ecuaciones que no son lineales, hay que sustituir expresiones algebraicas para resolverlas. En general, saber operar con el álgebra es muy útil y básico, <u>aunque eso no es hacer matemáticas</u>.

El método de *sustitución* consiste en despejar una incógnita, la que sea más fácil de despejar, y sustituir en la otra ecuación esa expresión obtenida, siempre **en la otra** ecuación (¿qué pasa si sustituyes en la misma?). Va el ejemplo con la que ya habíamos resuelto.

Por el método de *sustitución* resuelve el sistema: $3x + 1 = -4y$; $y - 17 = 5x$

Observamos que es más fácil despejar a la incógnita *y* de la segunda ecuación: $y = 5x + 17$; ésta será la expresión por la que sustituyamos a *y* en la primera ecuación: $3x + 1 = -4(5x + 17)$. La ecuación resultante ha quedado sólo con una incógnita y es más simple de resolver.

$3x + 1 = -20x + 68$; $23x = 69$; $x = 69/23$; $x = 3$

Hagamos lo mismo, para encontrar la incógnita y. De una ecuación despejamos a x, por ejemplo de la primera: $x = (-4y - 1)/3$, que sustituiremos en la segunda ecuación:

$y - 17 = 5(-4y - 1)/3$ y resolvemos:

$3(y - 17) = 5(-4y - 1)$; $3y - 51 = -20y - 5$; $23y = 46$; $y = 46/23$; $y = 2$.

Comprobamos en la primera ecuación:

20. Mediante el método de sustitución, resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones y, cuando tengas el resultado, compruébalos sustituyéndolos en las ecuaciones originales:
    a. $2x - y + 5 = 0$; $x - 2 = y + 1$
    b. $3m + 2n = 4$; $2m + 2n = 3$
    c. $7 = 3p + 2q$; $4q = -3p + 8$
    d. $(v - 2)/5 + 3t = 0$; $3(v - 2t) - 6 = 0$

6. Método gráfico

El método gráfico consiste en graficar las rectas y ver el punto donde éstas se cortan. Obviamente requiere de dibujar bien y en un papel adecuado, por ejemplo en papel milimétrico para obtener la mejor aproximación al resultado. Para graficar una recta basta tener dos puntos y dibujarla, sin embargo, si tienes un error en alguno de los dos puntos, es claro que no llegarás al resultado correcto. Por eso te recomendamos tener tres puntos en cada recta pues si hay un error, es muy seguro que resaltará porque los puntos no estarán alineados.

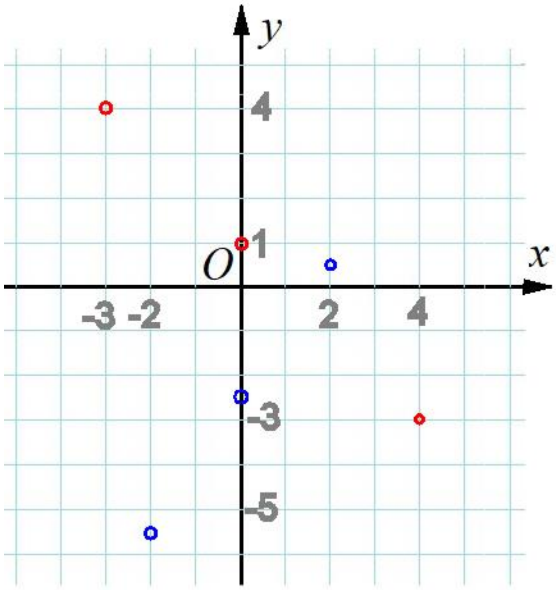
Graficar las rectas del sistema $3x - 2y = 5$; $x + y = 1$ y ver las coordenadas del punto donde se cortan. Empecemos por hacer una tabla para cada ecuación y asignemos valores a una de las variables para obtener el de la otra.

$3x - 2y = 5$	
x	y
-2	$-11/2$
0	$-5/2$
2	$1/2$

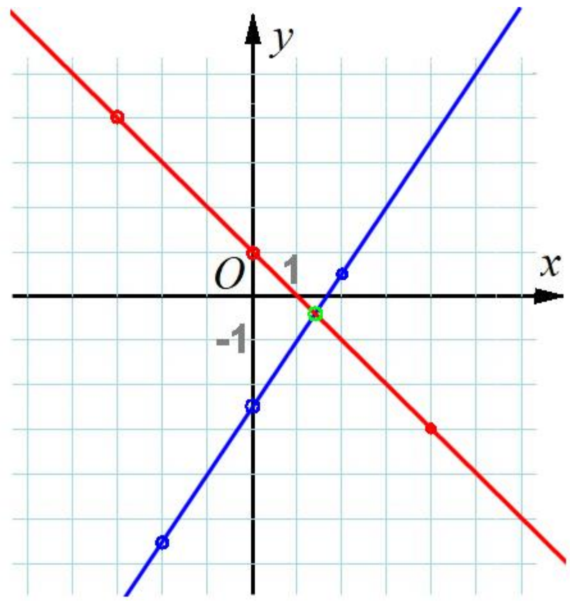
$x + y = 1$	
x	y
-3	4
0	1
4	-3

Lo siguiente es graficar los puntos y sobre ellos pintar las rectas respectivas.

En el momento de ver las coordenadas del punto de intersección, nos damos cuenta de las limitaciones de este método para resolver el sistema de ecuaciones, pues inician con la precisión de los instrumentos con los que dibujamos. A ello debemos sumarle nuestras deficiencias visuales. No obstante, la gráfica es un buen modelo para observar la situación.



Gráfica de los puntos



Gráfica de las rectas

¿Qué coordenadas miras en el punto de intersección? Por ejemplo, si digo que $y = -1/3$, tendré que decir que la $x = 1 + 1/3$, porque la ordenada de la segunda recta va descendiendo exactamente en razón 1 a 1 conforme aumenta su abscisa. Por esta razón, lo mismo ha de concluir quien diga que $y = -0.4$ deberá decir que $x = 1.4$.

Visualmente, a primera vista parecen tener la misma inclinación, aunque una apunte para un lado y la otra al lado contrario. Sin embargo, si vemos con más detalle, apoyándonos en el cuadriculado, nos damos cuenta que la primera recta asciende más rápido que lo que desciende la segunda.

En efecto, la primera gráfica asciende 1.5 unidades por cada unidad que se desplaza hacia la derecha, en tanto que la segunda, desciende una unidad por cada unidad que se desplaza a la derecha. En otras palabras, la primera recta está menos inclinada que la segunda (claro, además de que se inclinan en sentido contrario). Esa es la riqueza de las gráficas, y se potencia cuando las trasladamos a lo que significa nuestro modelo.

21. Grafica cada uno de los sistemas de ecuaciones que se dieron en el problema 20.

7. Un vídeo más

¿Necesitas otro respiro? Ve este teaser de un documental sobre la OMM:

https://youtu.be/DxQY0qgp-Wc

8. Determinantes (sólo para valientes)

Los apartados 8 y 9 son sólo para valientes, es decir, no es tan necesario que lo sepas para poder avanzar, pero te pueden llegar a ser de ayuda con ciertos problemas. Si todavía quieres aprender un poco más necesitarás prestar atención y (si lo necesitas) preguntar a tu asesor por las cosas que no te queden claras. Si no estás seguro de querer procesar más información, recuerda que hay más problemas en el apartado 10.

Un método más, que es el principio de lo que utilizan las calculadoras porque es sencillo de programar, se llama de *determinantes*.

Un determinante es un número que viene dado por un arreglo de números. En el caso de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, los arreglos vienen dados en dos renglones y dos columnas, le llamamos de orden dos. Análogamente si se tratara de un sistema con tres ecuaciones y tres incógnitas, los arreglos vienen dados por tres renglones y tres columnas, es decir sería de orden tres; y así sucesivamente.

Se dice que es un arreglo, porque cada elemento ocupa un lugar preciso, de tal manera que si intercambiáramos algunos de lugar, el resultado podría ser diferente.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ El arreglo se coloca entre dos barras y el resultado es $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Los subíndices están indicando al renglón y columna al que pertenece el número en el arreglo, así a_{11} es el elemento que se encuentra en el primer renglón y en la primera columna, a_{12} se encuentra en el primer renglón y en la segunda columna, a_{21} se encuentra en el segundo renglón y en la primera columna, a_{22} se encuentra en el segundo renglón y en la segunda columna

$$\begin{array}{r c} & \text{Columna 1} \quad \text{Columna 2} \\ \begin{array}{r}\text{Renglón 1}\\ \text{Renglón 2}\end{array} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{array}$$

$-a_{21}a_{12}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$a_{11}a_{22}$

El valor del determinante se obtiene como ya se indicó, pero en la imagen está claro que no se trata de aprenderse la fórmula, sino de ver que se trata del producto de las diagonales, pero… al producto que se obtiene de la segunda diagonal hay que cambiarle el signo. Así,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) - (3)(1) = 10 - 3 = 7$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-3)(4) - (3)(-2) = -12 - (-6) = -12 + 6 = -6$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1) - (2)(1) = 0 \qquad \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} = (6)(5) - (10)(3) = 30 - 30 = 0$$

Los determinantes tienen muchas propiedades, una de ellas es que si una columna o un renglón es igual a otro (o si uno es múltiplo de otro) el resultado es cero.

Para resolver un sistema de ecuaciones por medio de los determinantes, es necesario tener en el miembro izquierdo a los términos que contienen las incógnitas y en el derecho a los términos independientes. Además, hay que acomodar a las incógnitas en orden: Las "x" en una columna y las "y" en otra. Por ejemplo, el siguiente sistema ya está acomodado:

$$3x + 4y = -1$$
$$-5x + y = 17$$

Este acomodo definirá a tres determinantes. El primero es el determinante asociado al sistema, se llamará Δ (es la letra delta mayúscula griega), y está formado por los coeficientes de las incógnitas en el orden en el que ya fueron acomodadas. En este caso

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (-5)(4) = 3 - (-20) = 3 + 20 = 23$$

Un determinante asociado a cada una de las incógnitas, les llamaremos Δx y Δy. Para calcularlos, en el determinante del sistema, se sustituye la columna de los coeficientes de la incógnita correspondiente por la columna de los términos independientes. Así,

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 17 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1) - (17)(4) = -1 - 68 = -69$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 17 \end{vmatrix} = (3)(17) - (-5)(-1) = 51 - (5) = 46$$

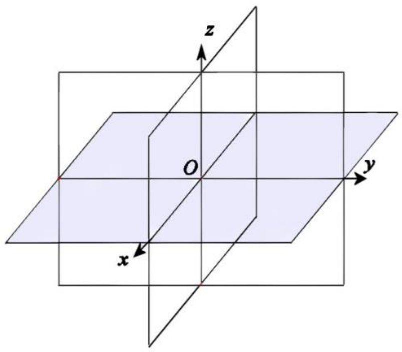
Por último, para calcular los valores de las incógnitas se efectúan los cocientes siguientes:

$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-69}{23} = -3$ y $y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{46}{23} = 2$. La solución del sistema es (-3, 2)

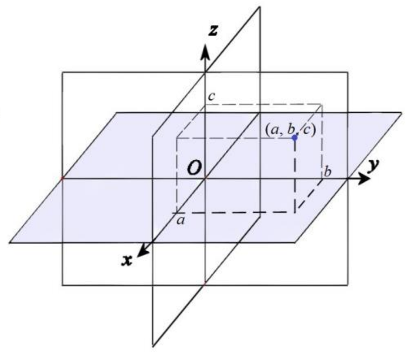
22. Resuelve por el método de determinantes cada uno de los sistemas de ecuaciones que se dieron en el problema 20.
23. Resuelve por el método que quieras los siguientes sistemas de ecuaciones;
    a. $-2x/3 + 5(y - 1) = 1; \quad x - y = 0$
    b. $3(x - 2y) - 18 = 0; \quad 5x - 10 = 10(y + 3)$
    c. $x/2 - y/3 = 1; \quad 6(x - 1) = 4y + 6$

9. Sistemas de tres ecuaciones (sólo para valientes)

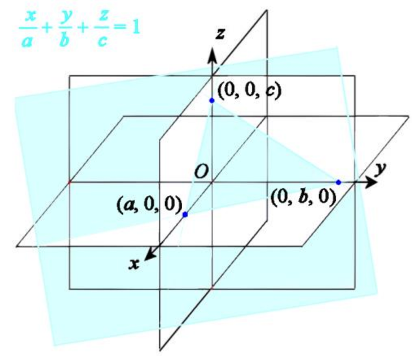
Ahora pasemos a sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas. Una ecuación con dos incógnitas representa una línea en el plano cartesiano y sus puntos son parejas ordenadas (x, y). Al tener una ecuación con tres incógnitas, ésta representa un plano en el espacio cartesiano de tres dimensiones y los puntos son ternas ordenadas (x, y, z).



Espacio cartesiano en tres dimensiones

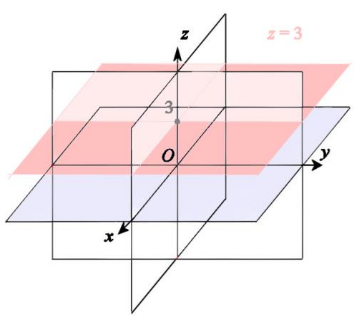


Coordenadas de un punto en el espacio tridimensional

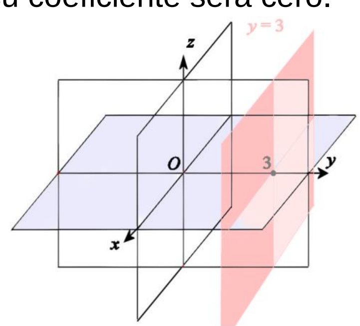


Plano en el espacio tridimensional

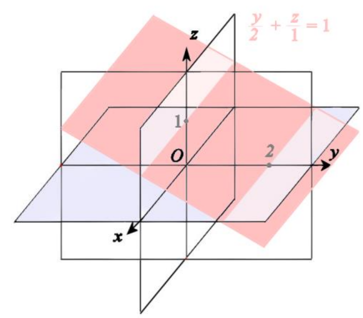
- La ecuación de un plano inclinado a todos los planos cartesianos contendrá todos los términos de las incógnitas, es decir, ninguna tendrá coeficiente cero.
- Si se trata de un plano perpendicular a un eje (o lo que es lo mismo: paralelo a alguno de los planos cartesianos), su ecuación tendrá sólo una incógnita, la del eje en cuestión, pues los coeficientes de las otras serán cero. Por ejemplo, el plano xy, tiene ecuación $z = 0$ pues es perpendicular al eje z; y si ese plano horizontal lo subes 3 unidades, su ecuación será $z = 3$ pues cortará al eje z en la *cota* 3. (Aunque no está muy difundido, los nombres son *abscisas* para los valores de x, *ordenadas* para los valores de y, y *cotas* para los valores de z.)
- Si se trata de un plano paralelo a un eje (o lo que es lo mismo: perpendicular a alguno de los planos cartesianos), su ecuación tendrá sólo dos incógnitas, la del eje en cuestión no aparecerá y, su coeficiente será cero.



Plano *z* = 3



Plano *y* = 3



Plano paralelo al eje *x*

Los métodos de solución son los mismos, pero si antes reducíamos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas a una ecuación con una incógnita, ahora deberemos reducir el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (que ya sabemos resolver). Para no perdernos en el transcurso de la explicación, nombremos a las ecuaciones como A, B y C. Además, siempre convendrá acomodar las incógnitas en orden: Las "x" en una columna, las "y" en otra, y las "z" en otra más.

Empecemos por el siguiente sistema:

(A) …………… $3x - 7y + z = 1$

(B) …………… $-x + y - 2z = 3$
(C) …………… $2x - 3y + z = 0$

Usemos el método de reducción: elegimos la variable que eliminaremos, por ejemplo la z, entonces seleccionamos dos pares de ecuaciones, por ejemplo A con B y B con C (las escogí así porque la incógnita z tiene diferente signo, si no fuese así le cambio todos los signos a una de las ecuaciones), y en cada par multiplicaremos una ecuación por el coeficiente de la otra para proceder con la suma de las ecuaciones. Empecemos A con B las cuales quedan como:

(A_{AB}) …………… $6x - 14y + 2z = 2$ Le llamé ecuación A_{AB} pero puedes llamarle como quieras.
(B_{AB}) …………… $-x + y - 2z = 3$ Al sumarlas obtenemos $5x - 13y = 5$, la cual llamaré (AB).

Continuamos con el otro par:

(B_{BC}) …………… $-x + y - 2z = 3$
(C_{BC}) …………… $4x - 6y + 2z = 0$ Al sumar éstas queda $3x - 5y = 3$, la cual llamaré (BC).

Ahora tengo que las ecuaciones AB y BC forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que ya sé resolver.

24. Resuelve el sistema que forman las ecuaciones AB y BC que se acaban de obtener.

Si el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas lo queremos resolver por sustitución, elegimos una incógnita, de alguna de las tres ecuaciones, que sea fácil de despejar y la sustituimos en las otras dos ecuaciones. Por ejemplo, de la ecuación B despejamos a "y" para sustituirla en las ecuaciones A y C. Así, $y = x + 2z + 3$ que al sustituirla en las otras ecuaciones nos da $3x - 7(x + 2z + 3) + z = 1$, la cual, al quitar el paréntesis queda $3x - 7x - 14z - 21 + z = 1$ y podemos simplificar como:

(A2) ……………… $-4x - 13z = 22$ La llamé A2 porque la sustituí en A y obtuve otra ecuación

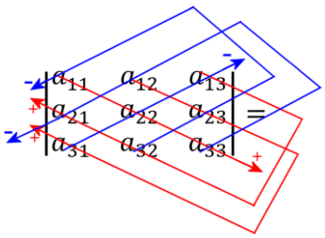
Para la ecuación C tengo $2x - 3(x + 2z + 3) + z = 0$, quito paréntesis: $2x - 3x - 6z - 9 + z = 0$ y simplifico como:

(C2) ……………… $-x - 5z = 9$ Así, estas dos nuevas ecuaciones, A2 y C2, forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que ya sé resolver.

25. Resuelve el sistema que forman las ecuaciones A2 y C2 que se acaban de obtener.

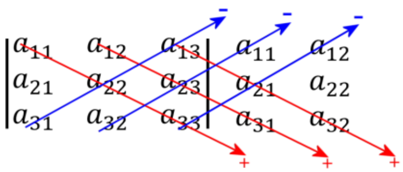
Si quiero usar determinantes para resolverla, sigo lo mismo que para el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, pero lo único novedoso es el cálculo de un determinante de tercer orden (tres renglones y tres columnas). El determinante de primer orden es el mismo número, eso no tiene aplicación práctica fuera de los programas de cómputo; los de segundo orden ya vimos cómo se calculan, los de tercer orden te los digo enseguida, después de advertirte que para los determinantes de mayor orden hay otros métodos de cálculo. Para los de tercer orden se hace lo que indican las figuras siguientes:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$



¡Qué feo se ve!, ¿verdad? Aprenderse la fórmula o el dibujo está…

Aunque el dibujo esquematiza a cuáles productos se les cambia el signo y a cuáles no, parece araña. Afortunadamente, hace casi un siglo, a algún profesor se le ocurrió poner lo mismo, pero mejor acomodado y fácil de recordar para que sus alumnos no sufrieran tanto: Copiar las dos primeras columnas al lado derecho; trazar las diagonales, las cuales nos dirán los números que se multiplicarán; a los productos que van de subida, habrá que cambiarles el signo. ¡Qué fácil!, ¿verdad? (Un método similar es copiar los dos primeros renglones en la parte de abajo y trazar las diagonales.



Usémoslo para resolver el sistema:-3,1,5 -6+4-5

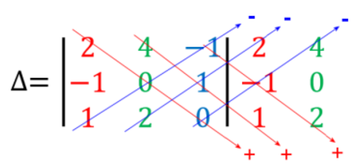
$2x + 4y - z = -7$

$-x \quad + z = 8$ Como no tiene incógnita "y" será $-1x + 0y + 1z = 8$, y puse las "z" alineadas.

$x + 2y \quad = -1$ No tiene incógnita "z", es $1x + 2y + 0z = -1$, y las incógnitas están alineadas.

Primero calculamos el determinante asociado al sistema, que viene dado por los coeficientes de las incógnitas, siempre en orden, si alguna no está, el coeficiente es cero.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$



$\Delta = (2)(0)(0) + (4)(1)(1) + (-1)(-1)(2) - (1)(0)(-1) - (2)(1)(2) - (0)(-1)(4)$

$\Delta = (0) + (4) + (2) - (0) - (4) - (0) = 2$

Ahora habremos de calcular el determinante asociado a cada incógnita, recordando que la columna de los coeficientes de la incógnita será sustituida por la columna de los términos independientes, es decir, los que están en el segundo miembro de las ecuaciones.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -7 & 4 & -1 \\ 8 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \qquad \Delta x = \left|\begin{array}{ccc|cc} -7 & 4 & -1 & -7 & 4 \\ 8 & 0 & 1 & 8 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right.$$

$$\Delta x = (-7)(0)(0) + (4)(1)(-1) + (-1)(8)(2) - (-1)(0)(-1) - (2)(1)(-7) - (0)(8)(4)$$

$$\Delta x = (0) + (-4) + (-16) - (0) - (-14) - (0) = -6$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & -7 & -1 \\ -1 & 8 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \Delta y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -7 & -1 & 2 & -7 \\ -1 & 8 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right.$$

$$\Delta y = (2)(8)(0) + (-7)(1)(1) + (-1)(-1)(-1) - (1)(8)(-1) - (-1)(1)(2) - (0)(-1)(-7)$$

$$\Delta y = (0) + (-7) + (-1) - (-8) - (-2) - (0) = 2$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -7 \\ -1 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad \Delta z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & -7 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 8 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right.$$

$$\Delta z = (2)(0)(-1) + (4)(8)(1) + (-7)(-1)(2) - (1)(0)(-7) - (2)(8)(2) - (-1)(-1)(4)$$

$$\Delta z = (0) + (32) + (14) - (0) - (32) - (4) = 10$$

Por último, calculamos el valor de cada incógnita dividiendo el determinante asociado a ella entre el determinante asociado al sistema:

$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-6}{2} = -3$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1$ y $z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{10}{2} = 5$ La solución del sistema es (-3, 1, 5).

26. Verifica en cada una de las ecuaciones que ésta es la solución.
27. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método que te convenga:
    a. $x + y - z = -2$; $5(x - y) = -3z + 10$; $[3(x - y) + 4] / [5(y - z + x)] = -1$
    b. $2x - y = 0$; $2y - 3z = 7$; $x - z = 2$
    c. $x + y - z = 5$; $2x - 3y + z = -2$; $-x + y + z = 0$

A veces, aunque no parezca de inmediato, nos conviene hacer alguna transformación, o introducir una incógnita más, la cual no simplifica el problema del planteo o la mecanización de las operaciones. En el siguiente problema, hay una incógnita más que no se menciona

28. Todas mis camisas, excepto dos, son completamente blancas; también, todas mis camisas, excepto dos, son completamente azules; y, todas mis camisas,

excepto dos, son completamente amarillas. ¿Cuántas camisas tengo en total? y si es posible, dime el color de cada una de ellas. (Atención: La solución no es única.)

El siguiente sistema de ecuaciones[6] no parece que sea lineal, por ejemplo de la primera ecuación, al realizar la operación indicada se obtiene $12x + 12y = xy$ que es una ecuación cuadrática pues el término xy es de segundo grado.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}; \qquad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{20} \qquad ;\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15}$$

Sin embargo, al considerar a los recíprocos de las incógnitas, éstos se comportan como una ecuación lineal. Por tanto, hacemos un cambio de variables: $u = 1/x$; $v = 1/y$; $w = 1/z$ Además de multiplicar por 12, 20 y 15 y el sistema queda $12u + 12v = 1$; $20v + 20w = 1$; $15u + 15z = 1$.

29. Resuelve este sistema por determinantes, encuentra los valores de las incógnitas iniciales y comprueba tu resultado.

En ocasiones, el haber practicado lo suficiente, nos permite aplicar trucos que nos sirvieron en otros problemas, por ejemplo, en el siguiente sistema de ecuaciones, si consideramos los recíprocos de las ecuaciones y separamos las fracciones, el sistema se parece al anterior pues

$\frac{xy}{5x+4y}=6$ es equivalente a $\frac{5x+4y}{xy}=\frac{1}{6}$ y esto es $\frac{5}{y}+\frac{4}{x}=\frac{1}{6}$. Sólo haría falta el cambio de variable.

30. Resuelve este sistema:

$$\frac{xy}{5x+4y}=6; \qquad \frac{xz}{3x+2z}=8; \qquad \frac{yz}{3y+5z}=6$$

10. Más Problemas

Bueno, basta de mecanizaciones. Lo que hace verdaderamente placentero a las matemáticas en la solución de problemas y van algunos más para que te diviertas.

31. En un recinto del zoológico se tienen dos tipos de animales: avestruces y jirafas. Hay 30 ojos y 44 patas, ¿cuántos animales hay de cada tipo? (Obviamente, todos los animales son normales y están sanos.)
32. En una tienda de ropa, donde todos los pantalones tienen el mismo precio y las blusas también, en cada compra bonifican 20% más \$10. Norma compró un pantalón y una blusa y le bonificaron \$86, su mamá compró un pantalón y dos blusas y le bonificaron \$121. ¿Cuál es el precio de los pantalones y cuál es el de las blusas?

[6] Los problemas 29 y 30 son del libro: J. Armando Venero Baldeón, Matemática básica. Ediciones Gemar. Lima, Perú. 1990.

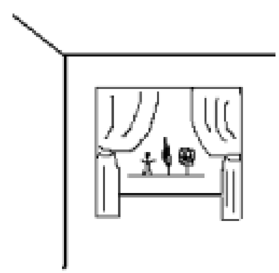
33. Una persona entró a una tienda con una cierta cantidad de dinero y gastó en ella las tres cuartas partes de éste. Al salir descubrió que traía tantos centavos como pesos había tenido al entrar y tantos pesos como la cuarta parte de los centavos que había tenido. ¿Cuánto dinero tenía al entrar?
34. Un tío le dijo a su sobrino: “Tengo el triple de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes ahora. Cuando tú tengas la edad que yo tengo ahora, en ese momento, nuestras edades sumarán 63 años.” ¿Cuáles son las edades de ellos actualmente?
35. En dos dimensiones, una ecuación con dos incógnitas, representa a una recta en el plano. Si las rectas no son paralelas, entonces el sistema tiene como solución a las coordenadas del punto de intersección. Si las rectas son distintas y paralelas, entonces el sistema no tiene solución. Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones, donde *k* es un valor a determinar.

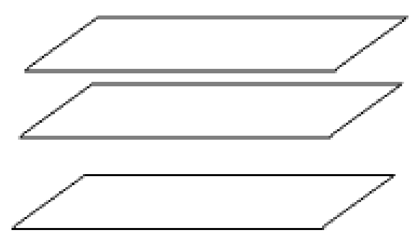
$$3x + 2y = 5$$

$$2x + ky = 3$$

  a) ¿Cuál debe ser el valor de *k* para que el sistema no tenga solución?
  b) ¿Cuál debe ser el valor de *k* para que el sistema tenga como solución una abscisa -3?

36. En tres dimensiones, una ecuación con tres incógnitas, representa a un plano en el espacio. Dos planos se cortan en una recta, es decir, si tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas, entonces es de esperarse que haya una infinidad de soluciones porque una recta tiene una infinidad de puntos. Cuando tres planos se cortan en un punto, decimos que el sistema tiene una solución única, por ejemplo, si los tres planos están formados por dos paredes y el techo, el punto donde se cortan todos es el rincón “donde las arañas hacen su nido”. Si los tres planos son paralelos, el sistema no tendrá solución, pero no es el único caso.





Ilustra otros casos, y da un ejemplo de ecuaciones de cada uno de los casos que señalas.

37. La hierba crece en todo el prado con igual rapidez y espesura. Se sabe que 70 vacas se la comerían en 24 días; y 30, en 60 días. ¿Cuántas vacas se comerían toda la hierba en 96 días?[7]

[7] Perelman, Yakov. Álgebra Recreativa, ya mencionado antes.

11. Vídeos

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

https://youtu.be/qeKEA066OSs

Ecuaciones de primer grado con más de una incógnita

https://youtu.be/EPLbEooJkGc

Sistemas de ecuaciones de 2x2

https://youtu.be/3FHhPLVUt9o

https://youtu.be/lTRANviJWEY

https://youtu.be/v6iKv3QXqNs

Determinantes para resolver un sistema de 2x2

https://youtu.be/yVRpljpObDU

Sistema de ecuaciones de 3x3

https://youtu.be/fMLyA0zscjY

Determinantes para resolver un sistema de 3x3

https://youtu.be/lLPcHVAqY80

12. SOLUCIONES

1. $x = 12$

2. $x = 0$

3. En este ejercicio nos dan la indicación que a es distinto de b. La razón está en que $ax – a^2 = bx – b^2$, de donde $ax - bx = a^2 - b^2$, es decir $(a - b)x = (a + b)(a - b)$ y en este momento, habrá de dividirse entre $(a - b)$ para despejar a x, pero como no se puede dividir entre cero, hay que señalar que $a \neq b$ o, en este caso en que el autor lo había afirmado toca recordarlo y precisarlo: “puesto que $a \neq b$ podemos dividir entre $(a - b)$ y obtener $x = (a + b)$”.
Es importante la aclaración cada vez que tengamos que dividir entre algo que desconocemos su valor.

4. Al efectuar las operaciones indicadas se obtiene:
$x^2 + ax + bx + ab – (x^2 -ax – bx + ab) = a^2 + 2ab + b^2$,
quitando paréntesis $x^2 + ax + bx + ab – x^2 -ax + bx - ab = a^2 + 2ab + b^2$,
Reduciendo la expresión $2ax + 2bx = a^2 + 2ab + b^2$,
Al factorizar en el primer miembro, nos damos cuenta que el segundo miembro nos conviene dejarlo como estaba: $(a + b)^2$. Así $2(a + b)x = (a + b)^2$,puesto que $(a + b) \neq 0$, entonces puede dividirse entre $2(a + b)$ para obtener $x = (a + b)/2$

5. $x = (a + b)/2$

6. $x = -0$

7. $x = -6$

8. $x = -a$

9. $x = 0$

10. $x = -(a + b + c)/3$

11. En el siguiente ejercicio sí conviene calcular los valores de cada incógnita. Cada uno de los cocientes es igual a 3. Así, $\frac{a}{4-a} = 3;\quad \frac{b}{5-b} = 3;\quad \frac{c}{7-c} = 3$ y de cada una podemos obtener los valores de a, b y c para hacer después la suma. Pero también, en el segundo paso de cada ecuación tenemos $a = 12 – 3a$; $b = 15 – 3b$; $c = 21 – 3c$, y si sumamos las tres ecuaciones tendremos $a + b + c = 48 -3(a + b + c)$, es decir $4(a + b + c) = 48$, por lo que $a + b + c = 12$

12. En la ecuación la podemos factorizar 2^x en el primer miembro y 3^y en el segundo para obtener lo siguiente: $2^x(2 + 1) = 3^y (3^2 - 1)$, que es igual a $2^x(3) = 3^y(8)$ al dividir entre 3 a la ecuación da $2^x = 3^{y-1}$ (8), ahora dividimos entre 8 (recuerda que $8 = 2^3$) y tenemos $2^{x-3} = 3^{y-1}$, puesto que los exponentes son enteros, la única posibilidad para que se dé la igualdad es que ambos exponentes sean cero. Es decir, $x = 3$; $y = 1$. Comprobémoslo sustituyendo en la ecuación original $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$: $2^{3+1} + 2^3 = 3^{1+2} - 3^1$ donde queda
$2^4 + 2^3 = 3^3 - 3^1$, es decir, 16 + 8 = 27 – 3 que se reduce a 24 = 24.

13. x = edad actual de Cristina

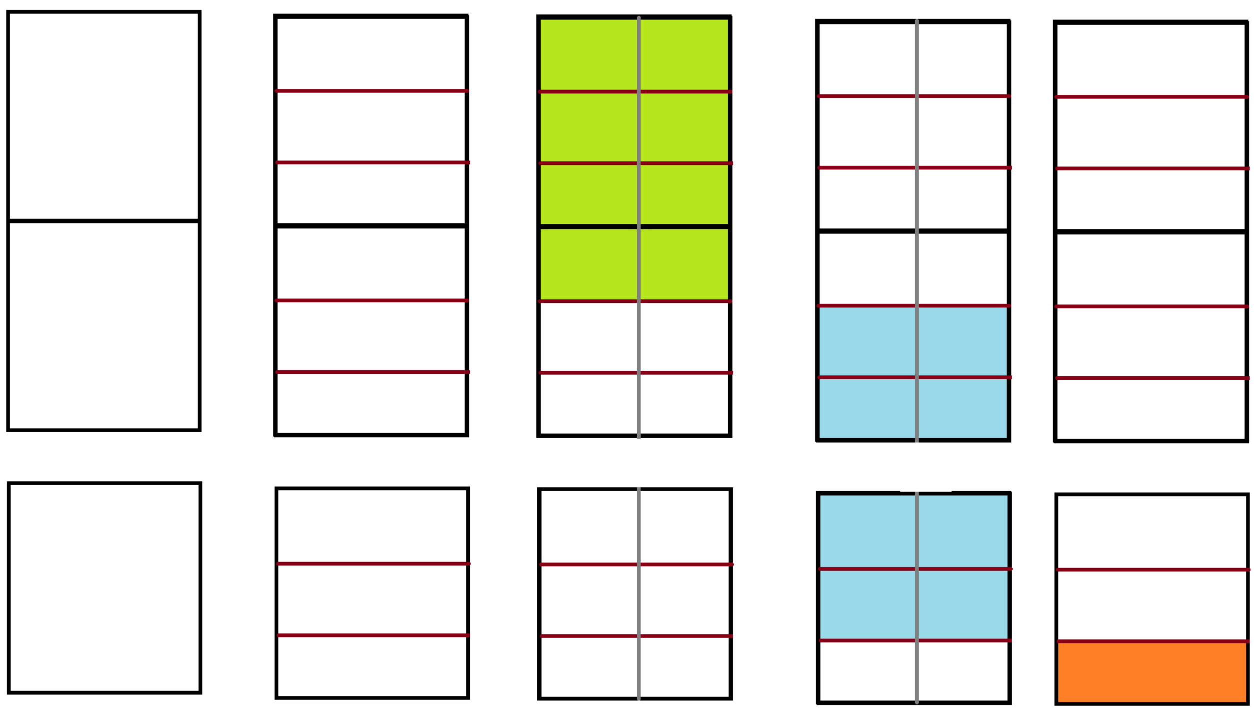
$x/4$ = edad actual de Roberto

$x + 20$ = edad de Cristina dentro de 20 años

$x/4 + 20$ = edad de Roberto dentro de 20 años

$x + 20 = 2(x/4 + 20)$ Ecuación a resolver, cuya solución es $x = 40$

14. ¿Te servirá este dibujo?



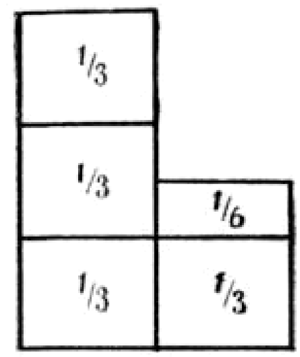
Aquí se muestra que cada persona siega 1/9 del total de la superficie, en un día, es decir, en medio día siega 1/18. Efectivamente, si consideramos al área total como 1, xy se siega en un día y 1y en otro, es decir $xy + y = 1$. Como $x = 8$, $9y = 1$ de donde $y = 1/9$.

El mismo Yakov Perelman nos advierte que este problema no es algebraico, sino aritmético y lo resuelve como sigue:

Si el prado mayor fue segado por todo el personal del equipo en medio día, y por la mitad de la gente en el resto de la jornada, es natural que medio equipo segó en medio día 1/3 del prado mayor. Por consiguiente, en el prado menor (que es la mitad del prado mayor), quedaba sin segar 1/2 - 1/3 = 1/6.

Si un trabajador siega en un día 1/6 del prado mayor, y si fueron segados 6/6 + 2/6 = 8/6 el primer día, esto quiere decir que había 8 segadores.

El problema se hace más comprensible si, al resolverlo, se emplea este sencillo diagrama



Sí, sólo aritmética, pero el razonamiento y manejo de la aritmética no es del calibre que todos tenemos… O quizá sí, pero hay que pensarlo buen rato antes de empezar a resolverlo.

15. También es un problema netamente aritmético, que suele confundirse con una regla de tres porque el enunciado nos empuja a eso (hacer lo que estamos adiestrados cuando no pensamos).

Lo que no era agua, pesaba 100 gramos (eso equivale a 1% de 10 kilogramos). Esos 100 gramos (que son 0.1 kg) representan ahora 2% del peso total. Por lo tanto, el peso total de la fruta es de 5 kg (pues 0.1 / 0.02 = 5).

Pero con ecuaciones es más fácil de explicarlo:

x = el peso final de la sandía

Antes de la evaporación: había 9.9 *kg* de agua y 0.1 *kg* de sólido, es decir 10 *kg*.

Después de la evaporación queda 98% de agua, es decir queda 98% *x* más el sólido (0.1kg) que no se evapora.

0.98*x* + 0.1 = *x* que se resuelve muy fácil 0.1 = *x* - 0.98*x*, es decir, 0.1 = 0.2*x*, de donde 0.1 / 0.2 = *x*, esto es, 5 = *x.*

16. Al sustituir las coordenadas del punto (100, 212) obtenemos $\frac{100}{a}+\frac{212}{32}=1$. Para despejar el valor de *a* conviene multiplicar ambos miembros de la ecuación por 32*a* y nos da
3200 + 212*a* = 32*a*, de donde queda que *a* = -160/9, por tanto, la ecuación es

$$\frac{x}{-\frac{160}{9}}+\frac{y}{32}=1$$

la cual podemos reescribir como -9*x* + 5*y* = 160, o más adecuado -9*C* + 5*F* = 160. Claro, también están: $F=\frac{9}{5}C+32$ si quieres saber directamente los grados Fahrenheit al sustituir los centígrados, o $C=\frac{5}{9}(F-32)$ en caso contrario.

17. Se trata de ver dónde $C = F$. De la ecuación $-9C + 5F = 160$ se obtiene $-4F = 160$, y de aquí,
$F = -40$ y $C = -40$. Por cierto, la ecuación $F = C$, o $x = y$ también es una recta: el conjunto de puntos donde la abscisa es igual a la ordenada (es una recta que forma 45º con los ejes de coordenadas, grafícala para que lo veas) y lo que hicimos con el procedimiento que resuelve el problema fue encontrar las coordenadas del punto donde estas dos rectas se cortan.

18. Al sustituir las coordenadas del punto (3, -1) en la ecuación $2x + 5ky + 8 = 0$ se tiene que
$2(3) + 5k(-1) + 8 = 0$, esto es $6 - 5k + 8 = 0$. Al resolver esta última ecuación se obtiene $k = 14/5$. Al sustituir el valor de k da $2x + 14y + 8 = 0$. Comprueba que tiene como una solución a (3, -1).

19 – 22. Son ejercicios solamente y la comprobación corroborará tus resultados.

23. En el primer inciso, se ve de inmediato que conviene resolverlo por sustitución pues la segunda ecuación nos dice que $x = y$. Al sustituir una de las incógnitas, digamos la y en la primera ecuación obtenemos a) $-2x/3 + 5(x -1) = 1$, que al quitar el paréntesis es lo mismo que $-2x/3 + 5x -5 = 1$. Multiplicamos ambos miembros por 3 para quitarnos, por ahora, la molestia de las fracciones y obtener $-2x + 15x -15 = 3$, reducimos términos semejantes: $13x = 18$, por tanto, $x = 18/13$, y también $y = 18/13$. Por último, se hace la comprobación.

b) En el inciso a), al eliminar paréntesis, se tiene $3x - 6y - 18 = 0$; $5x – 10 = 10y + 30$. Al acomodarlos obtenemos:

$3x - 6y = 18$

$5x – 10y = 40$

Si lo resuelves por reducción, suponiendo que quieras deshacerte de la "y", debes cambiarle de signo a una de las ecuaciones, digamos la primera, y multiplicar la primera ecuación por 10 y la segunda por 6 se obtiene: $-30x + 60y = -180$

$$30x – 60y = 240$$

Al sumar ambos miembros de las ecuaciones obtienes $0 = 60$, lo cual es una contradicción. ¿Cómo entender esto y cómo resolver el sistema?

Reflexionemos un poco. Sabemos que los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas tienen el equivalente de dos rectas en el plano cartesiano y al aplicar alguno de estos métodos encontramos el punto donde dichas rectas se cortan. Es decir, le estamos diciendo a las matemáticas que esas rectas se cortan y ellas nos contestan que sí, que $0 = 60$. Algo así como "Sí, cómo no, cuando 0 sea igual a 60" o "Sí, como que la Luna es de queso y yo soy Napoleón". Ese sarcasmo de la respuesta "0 = 60" está diciendo que partimos de una premisa falsa: "Las rectas se cortan". En otras palabras, las rectas de este sistema de ecuaciones son paralelas y nunca se cortan, o como dicen otros: “Las rectas paralelas se cortan en el infinito”

Efectivamente, es lo que te dirá el método de determinantes en el que

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 5 & -10 \end{vmatrix} = 0$ $\Delta x = \begin{vmatrix} 18 & -6 \\ 40 & -10 \end{vmatrix} = 60$ $\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 18 \\ 5 & 40 \end{vmatrix} = 30$

Así, x = 60/0 y y = 30/0, pero no puede dividirse entre cero ya que el resultado sería infinito que no es un número.

c) En este inciso, pasa algo similar al anterior, al acomodar el sistema tenemos:
$3x - 2y = 6$
$6x - 4y = 12$

Desde aquí ya debimos darnos cuenta que se trata de la misma ecuación, la segunda es la primera multiplicada por dos, por tanto tiene una infinidad de soluciones, todas las que cumplan con la ecuación de la recta. Sin embargo, si no nos dimos cuenta y continuamos, el método de reducción nos lleva a que 0 = 0, que es una identidad, la cual nos está advirtiendo que estas rectas se cortan en todos sus puntos, es decir, son la misma recta.

Si aplicaste el método de determinantes obtuviste:

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 0$ $\Delta x = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 12 & -4 \end{vmatrix} = 0$ $\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 0$

Así, x = 0/0 y y = 0/0, pero no puede dividirse entre cero. Sin embargo, en este caso se trata de una indeterminación, es decir el resultado puede ser cualquier valor.

24 a 27. Tus comprobaciones te dirán si estuviste bien o no. Te cuento que para hacer este texto me tardé mucho porque no es lo mismo hablar frente a un grupo, donde nunca faltan los benditos alumnos que te señalan los errores que tienes; pero al escribir las notas que tienes no había nadie que me dijera “estás mal” o “te equivocaste aquí”.

Decía uno de mis profesores que no nos preocupáramos porque él a veces decía una cosa y escribía otra, además de que ambas pudieran estar mal, “lo que está bien es lo que estoy pensando”, concluía.

Durante más de medio siglo que veo trabajar a mis profesores, a mis alumnos y a mis compañeros, he concluido que, al menos en matemáticas, casi todos cometemos muchos errores. No exagero si les digo que mis errores se elevan a 20%en las operaciones aritméticas y algebraicas. Es decir, que una de cada cinco operaciones que escribo está mal. A veces me doy cuenta casi de inmediato, otros errores los descubro cuando reviso y otros, casi al final. Ciertamente, otros más no los veo hasta que me los señala el revisor del texto. He descubierto que quienes entregan bien hecho su trabajo es porque lo “hicieron en automático”, es decir, primero lo pensaron bien, definieron el camino a seguir y se pusieron a hacerlo sin fijarse más en el asunto, en todo caso, sobre la marcha mejoraban su ruta; pero también lo hacen quienes lo revisan de manera continua, por ejemplo al escribir una expresión que se obtiene (por operaciones matemáticas) seguida de otra, al terminar de escribirla revisan comparando con el renglón anterior y haciendo las operaciones nuevamente (variando el método de cálculo un poco) para verificar lo obtenido. Si tuviste errores, por aquí o por allá, no te sientas mal, ni tampoco los menosprecies, “porque sólo fue el signo” o “porque hice mal la multiplicación y no me fijé que decía 2 en lugar de 3”, o algo parecido. Sí, todos tenemos errores y lo mejor es tener un buen método de verificación en todo momento. Te invito a que crees tus mecanismos de verificación momentáneos. Por otra parte, en el álgebra es necesario ejercitar mucho, aunque eso no signifique hacer matemáticas, pues te dará seguridad y agilidad mental. Perdona por este “rollo”, pero se tenía que decir ¡y ya se dijo!

28. Si todas las camisas son blancas, excepto dos, entonces entre azules y amarillas sólo hay dos, una de cada una. Repitiendo el mismo razonamiento para las azules y las amarillas, concluimos que tiene una de cada color, por lo tanto, habrá tres camisas. Lo anterior, explicado con el apoyo del álgebra es:

t = total de camisas.

x = número de camisas blancas.

y = número de camisas azules.

z = número de camisas amarillas.

Así, las condiciones del problema dan lugar a las ecuaciones: $t - 2 = x$; $t - 2 = y$; $t - 2 = z$

Como en las tres ecuaciones el primer término es el mismo, concluimos que $x = y = z$ (hay la misma cantidad de camisas blancas que de azules y que de amarillas).

Por otra parte, estamos suponiendo que solamente se tienen camisas de esos colores (condición que no está dada en el problema), el total de camisas será $t = x + y + z$, o lo que es lo mismo $t = 3x$. Pero de la primera ecuación, sabemos que $t = x + 2$. Al igualar los segundos términos de estas dos últimas igualdades obtenemos $t = 3$, y $x = 1$ (por tanto $y = z = 1$).

Es muy importante buscar la simplicidad, pero también conviene ser suspicaz. En este caso, la solución supuso algo que no aseguraba el problema: “solamente hay camisas blancas, azules y amarillas”. Si aceptamos la posibilidad de que existan camisas de otros colores (lo que no se niega en el enunciado del problema), hará falta una incógnita más:

w = número de camisas de color distinto al de las anteriores.

Con las tres primeras ecuaciones, que son las referentes a las condiciones del problema, se obtiene, como ya lo hablamos hecho, que $x = y = z$. Sin embargo, el total de camisas es

$t = x + y + z + w$, o lo que es lo mismo $t = 3x + w$, que al sustituirlo en la ecuación $t - 2 = x$ nos da una igualdad donde sólo aparecen dos incógnitas: $3x + w - 2 = x$.

De esta última igualdad, al despejar a w, podremos obtener todas las posibles soluciones de valores enteros no negativos para: $w = 2 - 2x$.

Así, $x = 1$; $y = 1$; $z = 1$; $w = 0$, que habíamos encontrado ya.

O bien, $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $w = 2$, que es otra solución.

Esta última solución tiene una interpretación que a muchos les parece sumamente sofisticada: "Sólo tengo dos camisas, ninguna de las dos es completamente blanca, ni azul ni amarilla". Por ejemplo una lila y otra naranja. Todas, excepto dos (la lila y la naranja), es decir cero, son blancas; todas, excepto dos (las mismas que hablamos dicho, la lila y la naranja), es decir cero, son azules; todas, excepto dos (¿ya adivinaron cuáles?), es decir cero, son amarillas.

29. $x = 20$; $y = 30$; $z = 60$. Las operaciones a realizar fueron muy simples, pero ¿no te equivocaste en ninguna?

30. $x = 48$; $y = 60$; $z = 36$.

31. Resolver este problema por ensayo y error, esto es "al tanteo", nos obligaría a probar diferentes valores para los animales. Desde luego que habrá quien lo intente hacer sin sistema, haciendo propuestas sin ningún orden; otros quizá procedan de manera sistemática, teniendo como guía a los datos: puesto que 30 ojos equivalen a 15 animales (suponemos que tienen dos ojos pues son normales, tampoco hay tuertos pues están sanos), y probarán primero con 0 jirafas y 15 avestruces para ver si la suman de las patas es 44; si no funciona, después probarán con 1 jirafa y 14 avestruces; luego 2 jirafas y 13 avestruces, etcétera, hasta que le atinen. Desde luego que el sistema es mejor si permite aproximarnos cada vez más rápido a la solución.

Otra manera de resolverlo es mediante el álgebra. Si llamamos *j* al número de jirafas y *a* al número de avestruces, el problema se reduce a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$a + j = 15$ animales

$2a + 4j = 44$ patas

Ahora examinemos una solución aritmética: Supongamos que estos animales son tan inteligentes que pueden comprender lo que les digamos, pero que no lo son tanto y nos obedecen cuando les ordenamos algo. Así, si les diéramos la orden "párense en dos patas", ¿cuántas patas habría en el piso? Obviamente 30, un par por cada animal. ¿Cuántas patas habría en el aire? Es fácil calcular que serán 44 - 30 = 14, es decir, todas menos las que están en el piso. ¿A qué tipo de animales pertenecen las patas que están en el aire? ¡Claro que a las jirafas! Ello significa que hay 7 jirafas, por lo tanto, habrá 8 avestruces. Espero que con este ejemplo, quede claro que la forma de resolver un problema no es única.

32**.** Llamemos *p* al precio de los pantalones y *b* al de las blusas. A Norma le bonificaron \$86, lo cual significa que el 20% del costo de un pantalón y una blusa es de \$76; por lo tanto el costo de un pantalón y una blusa es de $380, lo que podemos representar con la ecuación $p + b = 380$.

A su mamá le bonificaron $121, es decir, el 20% del costo de un pantalón y dos blusas es de $111, por lo tanto, el costo de un pantalón y dos blusas es de $555, lo que podemos representar con la ecuación $p + 2b = 555$.

Ahora, solamente queda resolver el sistema de ecuaciones:

$p + b = 380$

$p + 2b = 555$

Se puede utilizar cualquiera de los métodos tradicionales: por ejemplo, al restar la primera ecuación de la segunda se obtiene $b = 175$. Si este valor se sustituye en la primera ecuación y se despeja a p, queda $p = 205$. Por tanto, El precio de los pantalones es de $205 cada uno y el de las blusas es de $175.

33. Si decidimos emplear el álgebra para resolver este problema, debemos simbolizar cada uno de los elementos, y las relaciones que se presentan en el enunciado. Así, por una parte, están los objetos (billetes y monedas):

P = Número de pesos que tenía al entrar a la tienda.

C = Número de centavos que tenía al entrar a la tienda.

Por otra parte, las cantidades de dinero que representan dichos objetos:

P = Cantidad de dinero que tenía con los pesos al entrar a la tienda.

$C / 100$ = Cantidad de dinero que tenía con los centavos al entrar a la tienda. (¡Hay qué tiempos aquellos...! un centavo es la centésima parte de un peso y aunque lo dudes, se podían comprar cosas con ellos.)

Teniendo muy clara la separación entre el número (y tipo) de objetos y las unidades monetarias que representan tales objetos, se continúa la simbolización:

$P + C / 100$ = cantidad de dinero con la cual entró a la tienda.

Como gastó las tres cuartas partes, le quedó la cuarta parte de dinero

(A)……………. $\frac{P + C/100}{4} =$ Cantidad de dinero con la que salió de la tienda.

$C / 4$ = Número de pesos que tenía al salir de la tienda.

P = Número de centavos que tenía al salir de la tienda.

$C / 4$ = Cantidad de dinero que tenía con los pesos al salir de la tienda.

$P / 100$ = Cantidad de dinero que tenía con los centavos al salir de la tienda.

(B)…………….$C / 4 + P / 100$ = Cantidad de dinero que tenía al salir de la tienda.

Como las expresiones A y B representan a la misma cantidad, podemos igualarlas. Así,

$\frac{P + C/100}{4} =$ *C* / 4 + *P* / 100, de esta ecuación se concluye que

32 *P* = 33 *C*, pero sabemos que $0 \le C \le 99$, ya que 100 centavos harían otro peso.

De la última igualdad se sabe que *P* es múltiplo de 33 (*P* = 33*k*), y que *C* es múltiplo de 32 (*C*=32*k*). Donde *k* es el mismo número en ambos casos, de otra manera no se conservaría la igualdad. Además, hay de 0 a 99 centavos, esto es $0 \le 32k \le 99$. Así, *k* sólo puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3. Cada uno de estos cuatro valores genera una solución:

	Valores para			Dinero al	Dinero	Dinero al
	k	p	C	entrar	gastado	salir
1a. solución	0	0	0	$ 0.00	$ 0.00	$ 0.00
2a. solución	1	33	32	$33.32	$24.99	$ 8.33
3a. solución	2	66	64	$66.64	$49.98	$16.66
4a. solución	3	99	96	$99.96	$74.97	$24.99

34. Aquí parece haber varias incógnitas: La edad del tío, la del sobrino, el tiempo que ha pasado desde que el tío tenía la edad del sobrino, y el tiempo que pasará cuando el sobrino tenga la edad del tío. Aunque estos últimos no son valores que nos piden, además valen lo mismo.

x = edad actual del tío

y = edad actual del sobrino

t = tiempo que ha pasado cuando el tío tenía la edad que ahora tiene el sobrino. Este tiempo es el mismo que habrá de transcurrir para que el sobrino tenga la edad que ahora tiene el tío, y se corresponde con la diferencia de edades entre ellos.

Además:

x - *t* = edad del tío hace *t* años. Observa que este valor debe ser *y*.

y - *t* = edad del sobrino hace *t* años

x + *t* = edad del tío dentro de *t* años

y + *t* = edad del sobrino dentro de *t* años. Observa que este valor debe ser *x*.

De aquí, ya dijimos, tenemos una expresión que puede sustituir a *t*, la cual es *t* = *x* – *y*. Desde luego que habrá que hacer una buena traducción del “lenguaje hablado” al lenguaje matemático para estar en posibilidades de plantear las ecuaciones correspondientes y las simbolizaciones anteriores nos ayudan. Sin embargo, lo que resulta para muchos más complicado es situar las expresiones en el tiempo. Hacer una tabla, como si se tratara de una “línea del tiempo” nos ayudará mucho.

	Hace *t* años	Actualmente	Dentro de *t* años
Edad del tío	$x - t$	x	$x + t$
Edad del sobrino	$y - t$	y	$y + t$

Para extraer de allí las expresiones que nos llevarán a las ecuaciones, conviene sustituir el valor de t por $x - y$ en el interior de la tabla y simplificar, así sólo quedarán dos incógnitas.

	Hace *t* años	Actualmente	Dentro de *t* años
Edad del tío	y	x	$2x + y$
Edad del sobrino	$2y - x$	y	x

Ahora será fácil establecer las ecuaciones.

Tengo el triple de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes ahora:

$x = 3(2y - x)$

Cuando tú tengas la edad que yo tengo ahora, en ese momento, nuestras edades sumarán 63 años:

$(2x + y) + x = 63$

Después de quitar los paréntesis, simplificar y acomodar las ecuaciones, éstas quedarán:

$4x - 6y = 0$

$3x + y = 63$

Al resolver el sistema obtenemos $x = 27$ y $y = 18$. No olvides comprobar el resultado.

35. a) Sabemos que el sistema no tendrá solución (o quizá tendrá una infinidad de soluciones) si el determinante de los coeficientes es cero.

Así, $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} = 0$, es decir, $3k - 4 = 0$, por tanto, $k = 4/3$.

¿Cómo sabemos que en efecto el sistema no tiene solución? Bastará ver que el determinante asociado a alguna de las incógnitas es diferente de cero (pues si los determinantes asociados a las incógnitas fueran también cero para todas ellas, entonces el sistema tendría una infinidad de soluciones). Así, vemos que $\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$, por tanto para $k = 4/3$ el sistema no tiene solución.

b) Para que la solución tenga abscisa -3, es decir que $x = -3$, es necesario que se cumplan simultáneamente las ecuaciones

$3(3) + 2y = 5$

$2(3) + ky = 3$

De la primera obtenemos $y = -2$. Al sustituir este valor en la segunda ecuación, ésta queda como $6 - 2k = 3$. Al despejar se tiene que $k = 3/2$. Debes comprobar que este valor de k da como solución al sistema un valor de $x = -3$.

36. Las situaciones pueden ser las siguientes. (Añado un ejemplo muy simple de ecuaciones para cada caso.) NOTA: Cuando el plano está más oscuro, denota que los planos correspondientes a dos ecuaciones coinciden.

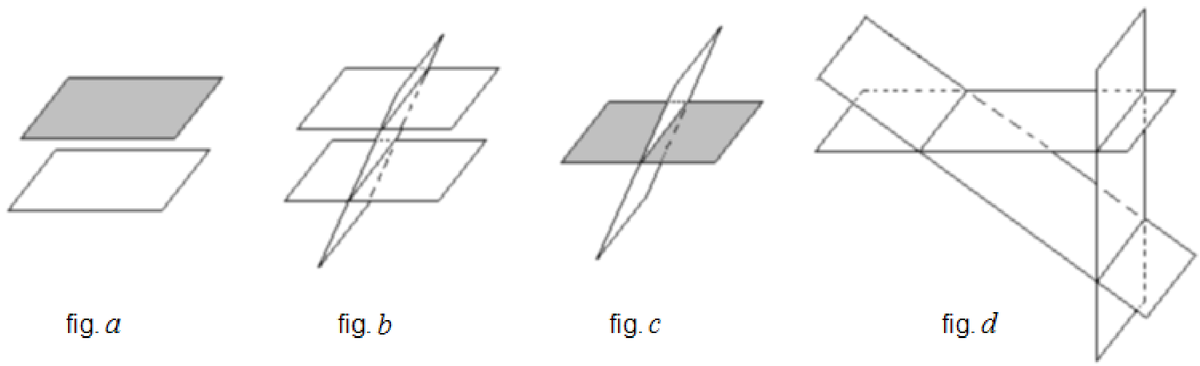


fig. a fig. b fig. c fig. d

$2z - 4 = 0$	$z - 2 = 0$	**$2z - 2 = 0$**	$z - 1 = 0$
$z - 2 = 0$	$z - 1 = 0$	**$z - 1 = 0$**	$x - 2 = 0$
$z - 1 = 0$	$x - 2 = 0$	$x - 2 = 0$	$x + z = 1$

37. Las vacas en el prado. Tal como está en el libro de Perelman

Problema

"Al estudiar las ciencias, los ejercicios son más útiles que las reglas", escribía Newton en su Aritmética Universal, y acompañaba las indicaciones teóricas con una serie de ejemplos. Entre ellos hallamos el de los toros que pastan en el prado, que generó un tipo específico de problemas semejantes a éste: "La hierba crece en todo el prado con igual rapidez y espesura. Se sabe que 70 vacas se la comerían en 24 días, y 30, en 60 días. ¿Cuántas vacas se comerían toda la hierba en 96 días?".

Este problema sirvió de argumento para un cuento humorístico, que recuerda el Maestro particular de Chéjov. Dos adultos, familiares del escolar a quien habían encargado resolver este problema, se esforzaban inútilmente por hallar su solución y se asombraban: - ¡Qué extraño es el resultado! -dijo uno- . Si en 24 días 70 vacas se comen la hierba, entonces, ¿cuántas vacas se la comerán en 96 días? Claro que 1/4 de 70, es decir, 17 1/2 vacas... ¡Este es el primer absurdo! El segundo todavía más extraño, es que si 30 vacas se comen la hierba en 60 días, en 96 se la comerán 18 3/4 vacas. Además, si 70 vacas se comen la hierba en 24 días, 30 vacas emplean en ello 56 días, y no 60, como afirma el problema.

- ¿Pero tiene usted en cuenta que la hierba crece sin cesar? - preguntó otro.

La observación era razonable; la hierba crece incesantemente, circunstancia que no puede echarse en olvido, pues en ese caso no sólo no puede resolverse el problema, sino que sus mismas condiciones parecerán contradictorias.

¿Cómo debe resolverse pues, el problema?

Solución

Introduzcamos también aquí una segunda incógnita, que representará el crecimiento diario de la hierba, expresado en partes de las reservas de la misma en el prado. En una jornada hay un crecimiento de y; en 24 días será $24y$. Si tomamos todo el pasto como 1, entonces, en 24 días las vacas se comerán $1 + 24y$.

En una jornada las 70 vacas comerán
$(1 + 24y) / 24$

y una vaca (de las 70) comerá
$(1 + 24y) / (24 \times 70)$

Siguiendo el mismo razonamiento: si 30 vacas acaban con toda la hierba del prado en 60 días, una vaca comerá en un día
$1 + 60y / (30 \times 60)$

Pero la cantidad de hierba comida por una vaca en un solo día es igual para los dos rebaños. Por eso
$(1 + 24y) / (24 \times 70) = (1 + 60y) / (30 \times 60)$
de donde
$y = 1/480$

Cuando se halla y (medida de crecimiento) es ya fácil determinar qué parte de la reserva inicial se come una vaca al día
$(1 + 24y) / (24 * 70) = (1 + 24/480) / (24 * 70) = 1/1600$

Por último, establecemos la ecuación para la solución definitiva del problema: si el número de vacas es x, entonces,
$[1 + (96/480)] / 96x = 1600$
de donde $x = 20$

20 vacas se comerían toda la hierba en 96 días.