Ecuaciones funcionales

1.1. Trucos comunes de ecuaciones funcionales en álgebra.

- Sustituir valores específicos en la función, como 0, 1, valores simples.

- Sustituir x por $f(x)$.

- Demostrar que la función es inyectiva o suprayectiva. Es más fácil demostrar que una función es suprayectiva cuando hay una variable en la ecuación funcional que está fuera de f. Por ejemplo, en la ecuación $f(x)y + f(x+y) = f(x+1)f(y+1) - 1$, hay una y fuera del f.

- Definir una función en términos de otra. Por ejemplo, si sospechan que una ecuación funcional tiene como solución $f(x) = x - 1$, pueden definir $g(x) = f(x) + 1$ y tratar de demostrar que $g(x) = x$.

- Si se tiene $f(x) + f(y) = f(x+y)$ y $f(x)f(y) = f(xy)$ siempre, entonces es conocido que $f(x) = x$ es la única solución.

- A veces, cuando la función está definida sobre los racionales, enteros o enteros positivos, utilizar inducción puede ser una buena idea (En el caso de los enteros positivos, inducción normal. En el caso, por ejemplo de enteros, podría hacerse inducción hacia ambos lados).

- Desigualdades. Por ejemplo, mostrar $f(x) \geq$ y $f(x) \leq x$.

1.2. Trucos para ecuaciones funcionales en teoría de números.

- Encontrar divisores muy grandes de expresiones. Esto significará que la expresión es igual a 0. Por ejemplo, si $f(n) - n$ es entero y tiene infinitos divisores, entonces $f(n) = n$.

- Buscar $f(n)$ cuando n es primo, o una potencia de algún primo.

- Encontrar un divisor común de f.

2. Problemas

Iniciamos con unos problemas fáciles. Uno de ellos (de los fáciles) se resuelve usando dos trucos que no mencioné en la sección anterior. Hay un gran salto de dificultad entre los problemas 7 y 8. Si resuelves el 8, lo más probable es que ya tengan nivel plata o bronce alto IMO.

1. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tales que

$$f(x)f(y) = f(xy) + x + y$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$. $(x+1)(y+1) = (xy)(y+1) + 1 + x + y \Rightarrow$

2. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para cada $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene

$$yf(x+y) = yf(x) + (2x+y)f(y)$$

3. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x+f(y)) = f(x+xy) + yf(1-x)$

4. Sea $\mathbb{Z}_{>0}$ el conjunto de los enteros positivos. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ tales que

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

para cualesquiere enteros positivos m y n.

5. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros positivos. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que

$$f(m - n + f(n)) = f(m) + f(n)$$

para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$.

6. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para cada $x, y \in \mathbb{R}$ le siguiente igualdad se cumple

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

donde $\lfloor a \rfloor$ es el máximo entero que no excede a.

7. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que, para cualesquiera enteros a, b, c que satisfagan $a + b + c = 0$, la siguiente ecuación es cierta:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Aquí $\mathbb{Z}$ denota el conjunto de los enteros.)

8. Denotamos por $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros positivos. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que para cualesquiera enteros positivos m y n, el entero $f(m) + f(n) - mn$ es distinto de 0 y divide a $mf(m) + nf(n)$.