Olimpiada Básica de Matemáticas en Guanajuato

@OBMGuanajuato | 24 de octubre del 2022

Doble conteo

Eduardo Jaziel Juárez Martínez

Doble conteo o bien contar de dos maneras, es una técnica para resolver problemas de igualdades entre expresiones algebraicas. Se trata, como su nombre lo dice, de encontrar dos maneras distintas de contar la misma cosa para así encontrar 2 expresiones distintas de la misma cantidad.

Como ejemplo inicial demostremos que la siguiente igualdad se satisface:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

- El lado izquierdo lo interpretamos como elegir k objetos de un conjunto de n objetos y tomarlos.
- El lado derecho lo interpretamos como elegir $n-k$ objetos de un conjunto de n objetos y tomar los k que no elegiste.

Los conteos anteriores corresponden a la misma acción, entonces las cantidades son iguales, es decir, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Ahora veamos el siguiente ejemplo clásico en doble conteo.

Probar que la siguiente igualdad se cumple:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Primero hay que interpretar la expresión anterior. Contaremos lo siguiente: la cantidad de hamburguesas distintas que se pueden preparar con n ingredientes dados si se pueden hacer con cualquier cantidad de ingredientes entre esos n (incluidos todos y ninguno).

- Primero, para cada cantidad posible entre 0 y n, contamos los posibles ingredientes que puede tener la hamburguesa. Dados k ingredientes, podemos preparar $\binom{n}{k}$ hamburguesas, pues hay que escoger k de entre los n ingredientes.

  Entonces hay
  $$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$
  hamburguesas distintas.

- Ahora contemos de diferente forma. Cada uno de los n ingredientes tiene 2 opciones: estar en la hamburguesa que vamos a preparar, o no estar. Entonces hay 2^n posibles hamburguesas distintas.

Como en los puntos anteriores estamos contando el mismo conjunto, ambas cantidades son iguales, es decir,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Ésta técnica no es muy usada mucho para resolver problemas, pero como entrenamiento es muy bueno para aprender a interpretar expresiones de combinatoria.

Ejercicios:

1. Demuestra la **Identidad de Pascal**:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Pista: toma un conjunto de n cosas con una de ellas ”especial”. Luego cuenta los diferentes casos por separado.

2. Demuestra el **Teorema del Binomio**:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

3. Contando de dos maneras diferentes, demuestra cada una de las siguientes identidades:

   a) $\binom{m+n}{r} = \binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \cdots + \binom{m}{r}\binom{n}{0}$.

   b) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n} = \binom{2n}{n}$.

   c) $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$.