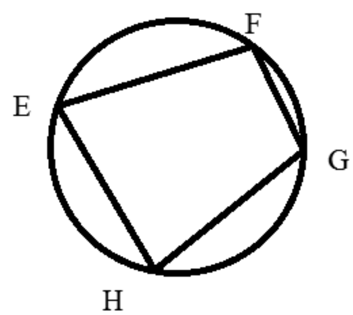
CUADRILÁTEROS CÍCLICOS

Mixtli Quetzali Melchor Fuentes

1. Cuadriláteros cíclicos



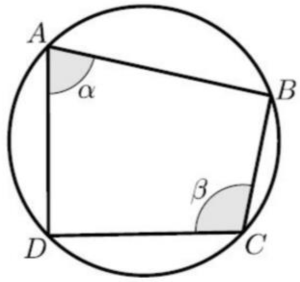
Por 3 puntos no alineados, pasa siempre una circunferencia. Esta afirmación es muy sencilla de comprobar ya que si tenemos 3 puntos A, B y C en el plano, estos pueden ser considerados como vértices de un triángulo, las mediatrices de sus lados se cortan en el circuncentro qué es el centro del círculo qué pasa por A, B y C (en el próximo material de geometría lo entenderás mejor).

4 puntos tomados al azar no se encuentran por lo general sobre una circunferencia. Cuando 4 puntos o más se encuentran sobre una circunferencia decimos que son concíclicos (o más brevemente cíclicos). Un polígono se dirá inscrito en una circunferencia si sus vértices están sobre una circunferencia, y el círculo se dice circunscrito al polígono. También diremos que el polígono es cíclico.

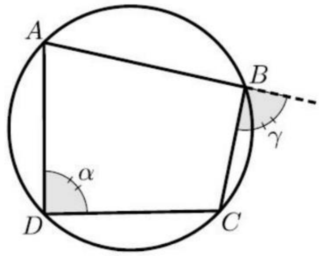
2. Condiciones suficientes y necesarias para la persecución de ángulos

- **Opuestos suplementarios**

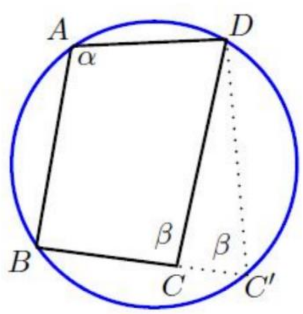
Un cuadrilátero es cíclico si y sólo si cumple que la suma de sus ángulos opuestos es 180°. Entonces, si es cíclico, esa será la suma de ángulos opuestos. Si sólo sabes que la suma de sus ángulos opuestos es esa, entonces podemos concluir que el cuadrilátero es cíclico. En seguida veremos la demostración.



En la imagen anterior, podemos ver que α cubre al arco BD y que β cubre al arco DB. Además, sabemos que $arco\, BD + arco\, DB = 360°$. Al ser α y β ángulos inscritos tenemos que $\alpha + \beta = \frac{arco\ BD}{2} + \frac{arco\ DB}{2} = \frac{arco\ BD + arco\ DB}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$. Queda demostrada la ida. Ahora falta el regreso. Pero antes divaguemos un poco en las utilidades y propiedades de esto.



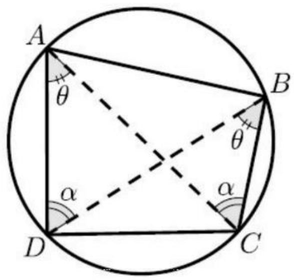
En la imagen anterior, se extendió AB, de manera que hay un ángulo externo. Dado que $ABCD$ es un cíclico, $\alpha + \angle ABC = 180°$. Y como AB es una línea, la suma $\gamma + \angle ABC$ también es $180°$, por lo que $\alpha = \gamma$. Si encuentras ya sea esta situación o la anterior, puedes garantizar que el cuadrilátero es cíclico.



Ahora para el regreso supongamos que (regresando al primer dibujo de esta sección) $\alpha + \beta = 180°$. Como solo sabemos la suma de ángulos opuestos, pero tenemos que demostrar que $ABCD$ es cíclico, supongamos que NO lo es: como en el dibujo. Extendemos BC hasta que choque a la circunferencia en un punto llamado C'. Dado que el cuadrilátero $ABC'D$ SÌ es cíclico, sabemos (porque ya lo demostramos) que $\alpha + \angle BC'D = 180°$, por lo que $\angle BC'D = \beta$. Entonces las líneas DC y DC' son paralelas; lo cual es una contradicción porque las paralelas no se intersecan como estas lo hacen en D. Esto nos dice que hicimos mal en suponer que C no estaba en la circunferencia. Queda, ahora sí, demostrado lo de la suma de ángulos.

- **Ángulos de las diagonales (moñito)**

Si en un cuadrilátero cíclico trazamos las diagonales, tendremos una figura como la que se muestra más adelante. Dado que el cuadrilátero tiene sus vértices en una circunferencia, y que al arco AB llegan dos ángulos inscritos, entonces esos dos ángulos son iguales. Es decir que, por ser un ángulo inscrito, $\angle ADB = \frac{arco\ AB}{2} = \alpha$; y, por otra parte, $\angle ACB = \frac{arco\ AB}{2} = \alpha$.



Haciendo el mismo análisis para los otros ángulos, se sabe que:

$$\angle DAC = \angle DBC = \frac{arco\ CD}{2} = \theta$$

$$\angle BDC = \angle BAC = \frac{arco\ BC}{2}$$

$$\angle ABD = \angle ACD = \frac{arco\ AD}{2}$$

Consideremos en el mismo dibujo, que el cruce se llama P. Es fácil ver que $\Delta APD \sim \Delta BPC$ y que sus razones de semejanza son: $\frac{AP}{BP} = \frac{DP}{CP}$. Manipulando un poco, eso es lo mismo que $\frac{AP}{DP} = \frac{BP}{CP}$, con lo que ahora hemos establecido razones de semejanza entre ΔAPB y ΔDPC. Si nos fijamos en los ángulos del ΔBCD, tenemos que $\theta + \alpha + \beta + \Omega = 180$. Pero la suma de los ángulos opuestos (digamos A y C) también es $\theta + \alpha + \beta + \Omega$, por lo que la suma de ángulos opuestos es $180°$ y hemos demostrado que con moñitos cumple ser cíclico.

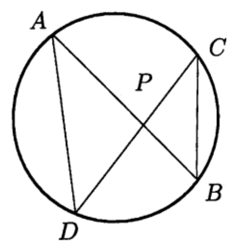
3. Datos de vital importancia

1. La religión fundada por Pitágoras, el pitagorismo, sobrevivió hasta la Edad Media. https://elibro.net/es/ereader/uaa/127786?page=154
2. Conforme a la leyenda, en cierta ocasión los atenienses se tuvieron que enfrentar a una plaga de tifoidea y, al acudir al oráculo de Delfos en busca de auxilio, Apolo les dijo que duplicaran el altar cúbico de oro que había en su templo respetando las reglas de la geometría griega (usando compás y reglas no graduadas). Al no lograrlo, los atenienses recurrieron a Platón, quien les dijo que estaban siendo castigados por su desprecio a la sublime ciencia de la geometría. https://elibro.net/es/lc/uaa/titulos/37796

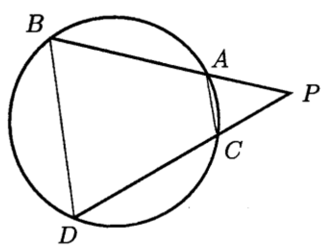
4. Potencias de un punto

Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia, se intersectan en un punto P, entonces $PA * PB = PC * PD$.

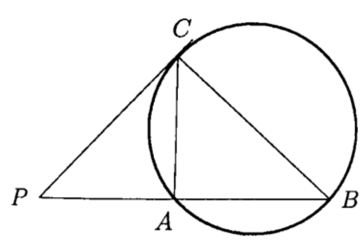
Si el punto de intersección se encuentra sobre la circunferencia, ambos miembros de la ecuación son cero y la igualdad es inmediata. Supongamos que P se encuentra en el interior de la circunferencia. Los triángulos PAD y PCB son semejantes ya que los $\angle PAD$ y $\angle PCB$ son iguales por abrir el mismo arco, de igual manera por abrir el mismo arco los ángulos $\angle PDA$ y $\angle PBC$ son iguales. Por lo tanto $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$ y entonces: $PA * PB = PC * PD$.



Si P se encuentra fuera de la circunferencia tenemos, por ser el cuadrilátero $ACDB$ es cíclico, $\angle PAC = \angle PDB$ y $\angle PCA = \angle PBD$. Por lo tanto, los triángulos PAC y PDB son semejantes y $PA * PB = PC * PD$.

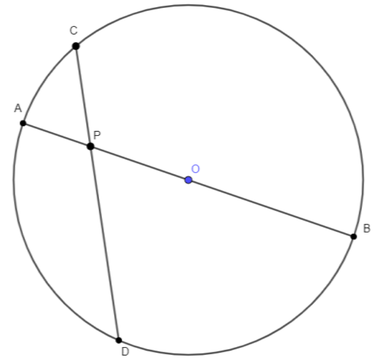


Si A, B y C son puntos sobre una circunferencia y si la tangente en C, intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PC^2 = PA * PB$.



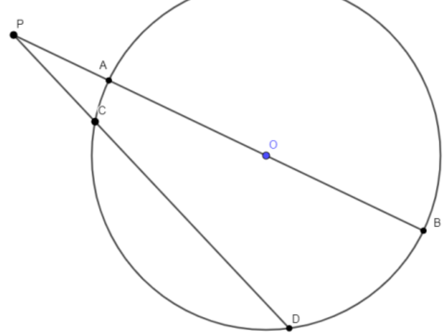
Sabemos que el ángulo seminscrito es igual al ángulo inscrito que abre el mismo arco, esto es $\angle ACP = \angle CBP$ y como $\angle CPA = \angle BPC$, tenemos que los triángulos PCA y PBC son semejantes, por lo tanto $\frac{PC}{PB} = \frac{PA}{PC}$, luego $PC^2 = PA * PB$.

Existen otros casos curiosos para analizar. Por ejemplo, si elegimos un punto P dentro del círculo y trazamos un diámetro a través de él.



Por potencia del punto P, $PA * PB = PC * PD$, pero $PA = AO - PO$ y $PB = OB + PO = AO + PO$, entonces $(AO - PO)(AO + PO) = AO^2 - PO^2 = r^2 - PO^2 = PC * PD$.

Ahora supongamos que el punto P se encuentra fuera del círculo.

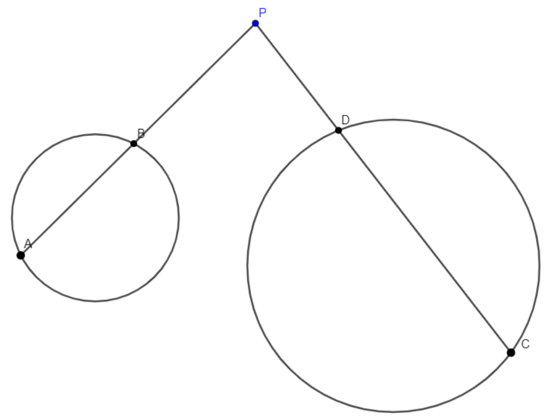


Por potencia del punto P, $PA * PB = PC * PD$, pero $PA = PO - OA$ y $PB = PO + OB = PO + OA$, entonces $(PO - OA)(PO + OA) = PO^2 - OA^2 = PO^2 - r^2 = PC * PD$.

5. Ejes radicales

Sean C_1 y C_2 dos circunferencias no concéntricas. El eje radical de C_1 y C_2 es el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia respecto a C_1 y C_2.

Hablando en español, supongamos que tenemos dos circunferencias C_1, C_2 no concéntricas y un punto P en el eje radical de C_1 y C_2. Se trazan una recta por P que interseque a C_1 en A y B. Y se traza otra recta que interseque a C_2 en C y D.

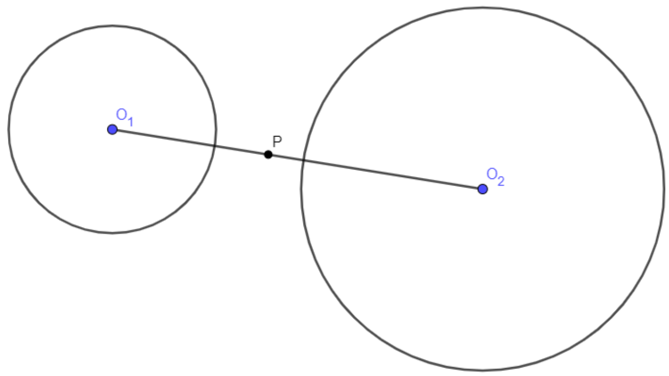


Como P se encuentra en el eje radical de C_1 y C_2, se cumplirá que $PA * PB = PC * PD$.

Teorema: El eje radical de C_1 y C_2 es una recta perpendicular a la recta que une los centros de C_1 y C_2.

Demostración:

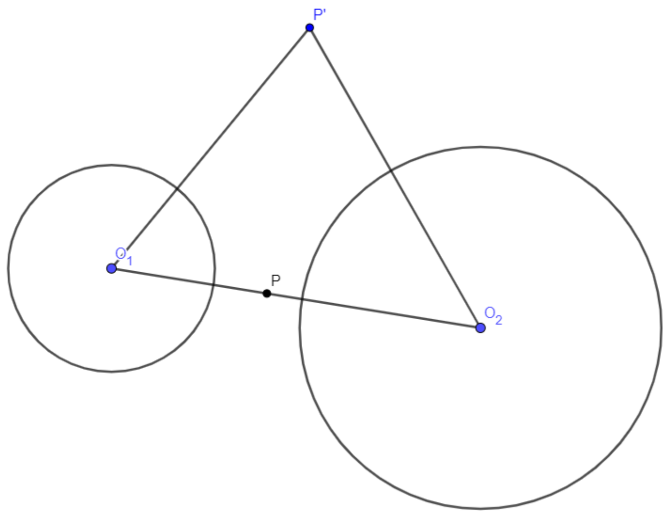
Primero, supongamos que tenemos el punto P sobre O_1O_2 (la recta que pasa por los centros de C_1 y C_2).



P cumple que

$$r_1^2 - PO_1^2 = r_2^2 - PO_2^2 \quad (1)$$

Ahora supongamos que tenemos otro punto P' que se encuentra sobre el eje radical.



Así que

$$r_1^2 - P'O_1^2 = r_2^2 - P'O_2^2 \quad (2)$$

Ahora, si restamos (1) y (2), obtendremos

$$r_1^2 - PO_1^2 - (r_1^2 - P'O_1^2) = r_2^2 - PO_2^2 - (r_2^2 - P'O_2^2)$$

$$\rightarrow P'O_1^2 - PO_1^2 = P'O_2^2 - PO_2^2 \quad (3)$$

Si recordamos el lema de la perpendicular, nos dice que dos segmento AB y CD son perpendiculares si y sólo si $CA^2 - DA^2 = CB^2 - DB^2$.

Por (3) y el lema de la perpendicular podemos concluir que $O_1O_2 \perp PP'$.

Ejercicios muy importantes:

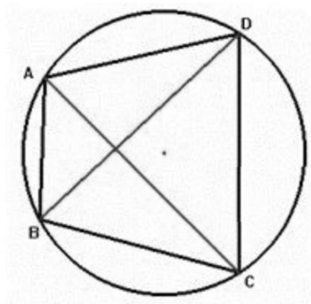
1. Demuestra que si dos circunferencias tienen una cuerda común, ese será su eje radical.
2. Demuestra que el eje radical de dos circunferencias es la recta que pasa por los puntos medios de las tangentes comunes.
3. Demuestra que dadas tres circunferencias con centros no colineales, los tres ejes radicales (uno por cada par de circunferencias) concurren. Al punto donde concurren se le llama **centro radical**.

Casos especiales:

- Cuando C_1 y C_2 son tangentes (externa o internamente), el eje radical de C_1 y C_2 es la recta tangente común.
- Cuando C_1 y C_2 se cortan en dos puntos A y B, la recta AB es el eje radical de C_1 y C_2.

6. Teorema de Ptolomeo

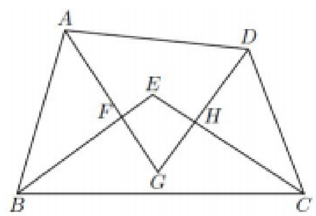
El cuadrilátero ABCD es cíclico si y solo si $AC * BD = AB * CD + BC * AD$.



7. Problemas

1. Demuestra el teorema de Ptolomeo.

2. En la siguiente figura están trazadas las bisectrices de los ángulos interiores del cuadrilátero *ABCD*, las cuales se intersecan en los puntos *E*, *F*, *G* y *H*, como se muestra. Prueba que el cuadrilátero *EFGH* es cíclico.



3. En un cuadrado *ABCD*, *M* es el punto medio de *AB*. Una línea perpendicular a *MC* por *M* intersecta a *AD* en *K*. Demuestra que $\angle BCM = \angle KCM$.

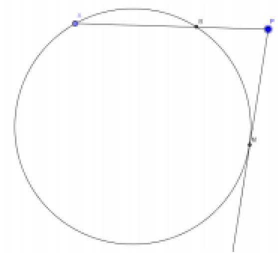
4. Sea ABCD un cuadrilátero convexo tal que las diagonales AC y BD son perpendiculares, y sea P su intersección. Demuestra que las reflexiones de P con respecto a AB, BC, CD y DA se encuentran en una misma circunferencia.

5. Una línea *PQ*, paralela al lado *BC* de un triángulo *ABC*, corta a *AB* y a *AC* en *P* y *Q*, respectivamente. La circunferencia que pasa por *P* y es tangente a *AC* en *Q* corta de nuevo a *AB* en *R*. Demuestra que el cuadrilátero *RQCB* es cíclico.

6. Por el punto A de la cuerda común AB de dos circunferencias, se traza una recta que corta a una de ellas en el punto C y a la otra en el punto D. Las tangentes a dichas circunferencias en los puntos C y D, se intersectan en el punto M. Muestra que los puntos B, C, D y M están sobre una circunferencia.

7. Sobre la tangente por B a una circunferencia de diámetro AB, se toman dos puntos C y D. Si AC corta a la circunferencia en F y AD corta a la circunferencia en E, demuestra que el cuadrilátero CDEF es cíclico.

8. En la siguiente figura están trazadas una secante y una tangente que intersectan la circunferencia en los puntos *A*, *B* y *M*. Demuestra que $PM^2 = PA \cdot PB$.



9. Sea *AD* el diámetro de un semicírculo. Se toman puntos *B* y *C* sobre el arco, de tal manera que *AB* = *BC*. Sea *P* el punto de intersección de *AC* y *BD*. Demuestra que

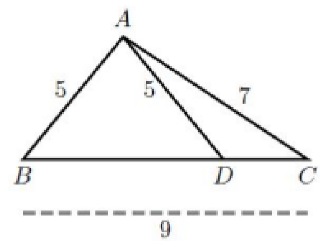
$$AD \cdot BC + BD \cdot PC = BD \cdot AC$$

10. Una circunferencia de radio *r* pasa por dos vértices adyacentes de un cuadrado. La tangente a la circunferencia trazada desde otro vértice del cuadrado es dos veces mayor que el lado del cuadrado. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

11. Considere un cuadrilátero convexo ABCD en el que las diagonales AC y BD se cortan formando ángulo recto. Sean M, N, R y S los puntos medios de los segmentos AB, BC, CD y AD, respectivamente. Sean W, X, Y y Z las proyecciones de los puntos M, N, R y S sobre las rectas DC, AD, AB, y BC respectivamente. Pruebe que todos los puntos M, N, R, S, W, X, Y, y Z están sobre una misma circunferencia.

12. Considere un semicírculo con centro en O y diámetro AB. Una recta interseca a AB en M y al semicírculo en C y D, de tal manera que MB < MA y MD < MC. Los circuncírculos de los triángulos AOC y DOB se intersecan por segunda vez en K. Muestre que MK ⊥ KO.

13. En la siguiente figura *AB* = *AD* = 5, *BC* = 9 y *AC* = 7. Encuentra $\frac{BD}{DC}$.



14. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en A y altura AD. Se construyen los cuadrados BCX_1X_2, CAY_1Y_2 y ABZ_1Z_2 hacia el exterior de triángulo. Sea AX_1 intersección BY_2 el punto U y AX_2 intersección CZ_1 el punto V. Pruebe que los cuadriláteros $ABDU$, $ACDV$ y BX_1UV son cíclicos.

15. Por un punto en el eje radical de dos circunferencias, dibujamos secantes a cada una de las dos circunferencias. Estas secantes determinan cuatro puntos sobre las circunferencias. Demuestra que esos puntos determinan un cuadrilátero cíclico.

16. Dos circunferencias son tangentes externamente en un punto A. Sean C y B los puntos donde una tangente común toca a dichas circunferencias. Demostrar que $\angle CAB = 90°$.

17. (15° **OMM**) En un cuadrilátero *ABCD* inscrito en una circunferencia, llame *P* al punto de intersección de las diagonales *AC* y *BD*, y sea *M* el punto medio de *CD*. La circunferencia que pasa por *P* y que es tangente a *CD* en *M* corta a *BD* y a *AC* en los puntos *Q* y *R*, respectivamente. Tome un punto *S* sobre el segmento *BD* de tal manera que *BS* = *DQ*. Por *S* trace una paralela a *AB* que corte a *AC* en un punto *T*. Pruebe que *AT* = *RC*.