Olimpiada Mexicana de MATEMÁTICAS Aguascalientes

Teoría de Números. Taller 3

10 de Abril 2018

Criterios de divisibilidad

Un criterio es una herramienta que nos ayuda a tomar alguna decisión; un criterio de divisibilidad sirve para decidir si cierto número es o no divisible entre otro número dado. A estas alturas de tu vida conoces un criterio para cualquier número aunque no le llames así.

Definición (Criterio de divisibilidad). Un número k es divisible entre x si y sólo si al dividir k entre x tenemos un cociente entero y un residuo igual a 0.

Es decir, que al hacer la casita, no te sobra nada. Lo que vamos a ver a continuación son criterios un poco más elegantes y vanidosos, en general mucho más cómodos. Queremos presentarlos de modo que sea sencillo hacer relaciones entre ellos.

- **Criterio de divisibilidad del 2.** Un número es divisible entre 2 si y sólo si su última cifra es divisible entre dos. Es decir, si y sólo si su última cifra es 0, 2, 4 6 u 8.

- **Criterio de divisibilidad del 4.** Un número es divisible entre 4 si y sólo si el número formado por sus últimas dos cifras es múltiplo de 4.

- **Criterio de divisibilidad del 8.** Un número es divisible entre 8 si y sólo si el número formado por sus últimas tres cifras es múltiplo de 8.

- **Criterio de divisibilidad del 5.** Un número es divisible entre 5 si y sólo si su última cifra es divisible entre 5. Es decir, si y sólo si su última cifra es 0 o 5.

- **Criterio de divisibilidad del 25.** Un número es divisible entre 25 si y sólo si el número formado por sus últimas dos cifras es múltiplo de 25.

  Los criterios del 2 y el 5 dependen de la última cifra. Esto está en estrecha relación con el hecho de que $2X5 = 10$ y el nuestro sea un sistema decimal. Criterios para potencias de estos dos números pueden extenderse de manera sencilla.

- **Criterio de divisibilidad del 3.** Un número es divisible entre 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre 3.

- **Criterio de divisibilidad del 9**. Un número es divisible entre 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre 9.

  Los criterios del 3 y el 9 dependen de la suma de las cifras. Es decir, son útiles cuando conozcamos las cifras que forman el número incluso si no conocemos su orden.

- **Criterio de divisibilidad del 6.** Un número es divisible entre 6 si y sólo si es divisible entre 2 y entre 3. Es decir, si y sólo si su última cifra es par y la suma de sus dígitos es múltiplo de 3.

- **Criterio de divisibilidad del 10.** Un número es divisible entre 10 si y sólo si es divisible entre 2 y entre 5. Es decir, si y sólo si su última cifra es 0.

- **Criterio de divisibilidad del 12.** Un número es divisible entre 12 si y sólo si es divisible entre 3 y entre 4.

  Observa que es falso que un número sea divisible entre 12 si y sólo si es divisible entre 6 y 2. Como contraejemplo, basta considerar al 6.

  Criterio de divisibilidad del 11. Numeramos los dígitos del número empezando desde las unidades con el número 1. Un número es divisible entre 11 si y sólo si la suma de los dígitos en posición impar menos la suma de los dígitos es posición par es un múltiplo de 11.

  El siguiente es un criterio de divisibilidad que buscamos evitar generalmente.

  Criterio fácil de divisibilidad del 7. Un número es divisible entre 7 si y sólo si el residuo al dividir entre 7 es exactamente 0.

  Criterio no-tan-fácil de divisibilidad del 7. Considera el número que se forma cuando al número original le quitas el dígito de las unidades ?es un número con un dígito menos. Un número es divisible entre 7 si el número formado quitándole el dígito de las unidades menos el doble del dígito de las unidades es múltiplo de 7.

Estos criterios son extremadamente útiles, sobre todo cuando se trata de números extremadamente grandes. Todos ellos se pueden aplicar reiteradamente ?aunque para algunos de ellos no tenga sentido hacerlo.

Ejemplo 1. Decidir si 98724790987 es divisible entre 3.

Solución. El criterio de divisibilidad entre 3 nos dice que depende de la suma de sus dígitos. La suma de los dígitos de 98724790987 es 70. Si no estamos seguros si 70 es o no un múltiplo de 3, hacemos la suma de sus dígitos que es 7. Como 7 no es múltiplo de 3, 70 tampoco lo es y 98724790987 tampoco.

Aunque parezca que algunos de estos criterios se extienden naturalmente, no siempre sucede así. Por ejemplo, es cierto que para ver si un número es múltiplo de 100 o de 1000 baste con que termine en dos o tres ceros respectivamente; también, es cierto que para ver si un número es o no múltiplo de 16 o 32 baste con verificar que el número formado por sus últimas cuatro o cinco cifras sea un múltiplo de 16 o 32 respectivamente; sin embargo, es falso que para que un número sea múltiplo de 27 u 81 baste con que la suma de sus dígitos sea un múltiplo de 27 u 81 respectivamente.

Además, hemos generado algunas ideas importantes: para ver que un número sea divisible entre 15, basta ver que es divisible entre 3 y 5; sin embargo, para ver que un número sea divisible entre 45, no basta ver que es divisible entre 3 y 15 sino entre 9 y 5. Más adelante, cuando te enseñemos otras herramientas, te vamos a pedir que pruebes estos criterios. Pero por ahora estás a salvo.

Ejercicios

Problema 1. ¿En qué puede terminar el número $1234x$ para que sea un múltiplo de 6? ¿Es posible que sea múltiplo de 9?

Problema 2. Encuentra todos los números entre 5000 y 6000 que son divisibles entre 2, 9, 5 y 11.

Problema 3.(1) Si multiplicas los impares desde el 97 hasta el 997, ¿cuál es el dígito de las unidades del resultado? **(2)** Si multiplicas todos los números primos, ¿cuál es el dígito de las unidades del resultado?

Problema 4. La leyenda del monstruo de Ranaballo dice que se despierta cada de vez en cuando y se come a todas las personas que están resolviendo este problema, y se vuelve a dormir tantos años como la suma de los dígitos del año en que despertó. Por ejemplo, si se despierta en el año 1234 entonces se duerme 1+2+3+4=10 años y despierta en el año 1244. El monstruo atacó por primera vez en el año 234 de nuestra era. ¿Estamos a salvo este año?

Problema 5. ¿Existe algún número múltiplo de 11 cuyos dígitos sean 1, 2, 3, 4, 5, 6 sin repetir y en algún orden?

Problema 6. Totoro tiene los números 19, 31, 53, 75 y 97 y los pone todos juntos para formar un solo número de diez cifras. ¿Es posible que el número que formó Totoro sea un número primo?

Problema 7. El gran mago Deeds, maestro de Fumanchí, tiene guardados en su caja del saber los números enteros del 1998 al 2008. Deeds va sacando al azar los números de la caja y los va poniendo en fila. Cuando ya tiene los 11 números en fila, pasa su varita mágica sobre ellos y los números se pegan para formar un solo número de 44 dígitos. ¿Puede ser primo este número?

Problema 8. El número de ocho dígitos, $7448x24y$, es divisible entre 72. (En este número, x, y están en lugar de un número del 0 al 9.) Si $x \neq y$, encuentra cuánto vale la resta $x - y$.

Problema 9. Sabemos que 45a es un entero positivo que tiene todos sus dígitos iguales. Encuentra el menor entero positivo a que cumple.

Problema 10. Encuentra el menor número que es igual a cinco veces el producto de sus dígitos.

Problema 11. Un encuestador del Inegi visita una casa. Atiende la señora de la casa y contesta que tiene 4 recámaras, 12 focos y 3 hijas. Cuando el encuestador pregunta sus edades, la señora dice que "Si multiplicas sus edades, el resultado es 36 y si las sumas, el resultado es el número de la casa". El encuestador voltea a ver el número de la casa y contesta "Señora, con eso no puedo saber sus edades". La señora dice "Tiene razón, perdón. Olvidé decir que la mayor toca el piano". El encuestador anota en su libreta las edades de las niñas y sigue su camino. ¿Cuáles son las edades?

Este material fue tomado del libro "Diminuto Curso de Teoría de Números y Anexas" y del taller para entrenadores impartido por Eugenio Flores Alatorre de Carma

Material selecionado por Roberto Kú y Horacio Sáenz.