¿Cómo leer y entender problemas?

Jesús Liceaga
OMMGTO

Antes de resolver un problema, primero tenemos que saber lo que nos pide. Para ello, comprender la estructura que suelen tener es muy útil, y es a lo que nos dedicaremos en este entrenamiento.

1. Leyendo Problemas

Para entender un problema, hay que leerlo con calma. Probablemente más de una vez. Algunas recomendaciones para hacer esto son las siguientes:

- Lee el problema frase por frase. Haz una pausa en los puntos.
- Después de cada frase, intenta hacer un dibujo de lo que dice (sobre todo en geometría o combinatoria) o trabajar con casos particulares (por ejemplo, si el problema dice algo del estilo "para cualquier n", elige valores particulares y estudia lo que pasa).
- Siempre ten en cuenta todas las hipótesis. Si no usas alguna es más difícil que el problema salga (o incluso puedes hacer una solución falsa).

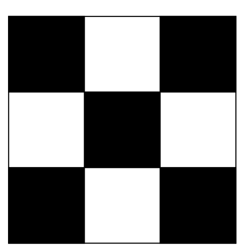
Ejemplo 1. Vamos a considerar el siguiente problema:

> Se tiene un tablero de $n \times n$ pintado como tablero de ajedrez. Está permitido efectuar la siguiente operación en el tablero: escoger un rectángulo en la cuadrícula tal que las longitudes de sus lados sean ambas pares o ambas impares, pero que no sean ambas iguales a 1, e invertir los colores de los cuadritos de ese rectángulo. Es decir, los cuadritos del rectángulo que eran negros se vuelven blancos y los cuadritos que eran blancos se vuelven negros.
> Determina para qué valores de n es posible lograr que todos los cuadritos queden de un mismo color después de haber efectuado la operación el número de veces que sea necesario.
> Nota: las dimensiones de los rectángulos que se escogen pueden ir variando.

A primera vista, este problema puede parecer abrumador, pues tiene mucho texto. Sin embargo, utilizando los puntos anteriores podemos comprenderlo mejor. Comencemos con la primera frase:

> **Frase 1.** Se tiene un tablero de $n \times n$ pintado como tablero de ajedrez.

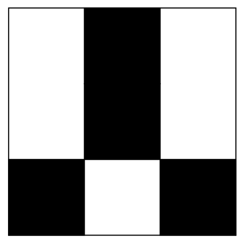
Esta frase nos dice el objeto con el que trabajaremos: un tablero de ajedrez. A continuación mostramos un dibujo de éste para $n = 3$.



> **Frase 2.** Está permitido efectuar la siguiente operación en el tablero: escoger un rectángulo en la cuadrícula tal que las longitudes de sus lados sean ambas pares o ambas impares, pero que no sean ambas iguales a 1, e invertir los colores de los cuadritos de ese rectángulo.

Esta es la frase más larga del problema, sin embargo, ayudándonos de los signos de puntuación, podemos separarla en pedazos más pequeños. En primer lugar, lo que está en azul nos dice qué vamos a modificar el tablero. ¿Cómo lo vamos a hacer? Eso nos lo dice el resto de la frase. En morado se nos explica cómo vamos a seleccionar cuadritos del tablero, y en cían como lo vamos a hacer.

A continuación mostramos un dibujo de cómo queda el tablero anterior al aplicar una vez la operación en el rectángulo superior de 1×3.



> **Frase 3.** Determina para qué valores de n es posible lograr que todos los cuadritos queden de un mismo color después de haber efectuado la operación el número de veces que sea necesario.

Lo que está haciendo la frase anterior nos plantea una pregunta, y es nuestro trabajo responderla: ¿para los tableros de ajedrez de qué tamaño podemos llegar a un tablero de un solo color después de aplicar la operación una cantidad finita de veces?

> **Frase 4.** Nota: las dimensiones de los rectángulos que se escogen pueden ir variando.

Esta oración simplemente está como una clarificación de la Frase 2, para asegurarse de que nos queda claro cómo funciona la operación que podemos realizar en el tablero.

Con todo esto, ya podemos disponernos a resolver el problema, aunque este no es el objetivo de la sección, así que puedes pensarlo con calma después (no te preocupes si no te sale, es un problema un poco complicado).

Ejercicio 1. Dibuja la figura asociada al siguiente problema (no es necesario que lo resuelvas):

> Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias que se cortan en los puntos P y Q. La tangente común a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ más cercana a P toca a $\mathcal{C}_1$ en A y a $\mathcal{C}_2$ en B. Así mismo, la tangente a $\mathcal{C}_1$ en P corta a $\mathcal{C}_2$ en C, donde C es diferente de P. Por otra parte, la prolongación de AP corta a BC en R. Demuestra que la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo PQR es tangente a BP y a BR.

2. Conjuntos

Un *conjunto* X es una colección de objetos que hemos relacionado de alguna manera. Si un objeto x está en X, decimos que x *pertenece a* X y escribimos $x \in X$.

Un *subconjunto* Y de un conjunto X simplemente es una colección formada únicamente por elementos que están en X. En este caso escribimos $Y \subseteq X$. Nótese que podríamos tomar todos los elementos de X, en cuyo caso $Y = X$, podríamos no tomar ninguno, en cuyo caso $Y = \varnothing$ (ese símbolo que parece una “O” con una raya denota el conjunto vacío).

Por ejemplo, en el siguiente ejercicio, esencialmente lo que se nos pide es encontrar un conjunto de parejas de enteros positivos que cumplen cierta propiedad.

Ejercicio 2. Encuentra todas las parejas de dos impares consecutivos cuyo producto es 143.

3. Lógica

Para facilitar la lectura de un problema, es importante conocer algunas palabras clave que suelen aparecer en estos, pues nos ayudará a entenderlos y evitar errores. Es por ello que estudiaremos un poco de lógica.

Una *afirmación* es un enunciado que es verdadero o falso. Por ejemplo, "me gustan las manzanas" es una afirmación, pues es verdadera o es falsa. Sin embargo, "come una manzana" no lo es, porque uno no se puede preguntar de la veracidad de esta oración. Solemos denotar las afirmaciones con letras mayúsculas, como P, Q.

3.1. Conectores Lógicos

Ya que tenemos afirmaciones, nos gustaría combinarlas de alguna manera. Es por ello que existen los conectores lógicos.

3.1.1. "y"

El conector "y" funciona de la manera en la que esperaríamos: la afirmación "P y Q" es cierta únicamente si tanto P como Q son ciertas. A continuación se muestra la tabla de verdad de ésta. En ella, la letra "v" considera el caso en el que la afirmación correspondiente sea verdadera y la letra "f" el que sea falsa.

P	Q	P y Q
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

Ejercicio 3. Sea n un entero positivo. Prueba que $n^3 - n$ es divisible entre 2 y 3.

3.1.2. "o"

El conector "o" en matemáticas funciona de manera ligeramente distinta a como estamos acostumbrados, pues para que la afirmación "P o Q" sea cierta, permitimos el caso en el que ambas son ciertas. A continuación se muestra la tabla de verdad de ésta. Nótese que en este caso el "o" permite que las dos afirmaciones se cumplan, a diferencia de como solemos usarlo en la vida cotidiana, en donde sólo una de ellas puede ser cierta.

P	Q	P o Q
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

Ejercicio 4. Sea n un entero. Demuestra que n^2 es divisible entre 3 o $n^2 - 1$ es divisible entre 3. (Sugerencia: nota que cualquier entero se puede escribir como $3k$, $3k + 1$ o $3k + 2$, donde k es otro entero).

3.1.3. "implica"

Suele escribirse como "P implica Q" o "si P, entonces Q". Aquí sólo debemos de suponer que se cumple P y ver que con eso llegamos a que se cumple Q.

Ejercicio 5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero. Demuestra que si sus cuatro vértices están sobre una circunferencia, entonces $\angle ABC + \angle CDA = 180°$.

3.1.4. "si y solo si"

Esta expresión se usa para referirse a una doble implicación. Tiene la forma "P si y solo si Q", y quiere decir "P implica Q y Q implica P". Por lo tanto, cuando te pidan probar algo de este estilo, tienes que suponer una de las afirmaciones para demostrar la otra y luego intercambiar los papeles. Además de el "si y solo si" también se suele usar la frase "es equivalente".

Ejercicio 6. Sea n un entero. Prueba que n es par si y solo si n^2 es par.

3.1.5. "no"

Este es un conector muy sencillo, tanto que solo afecta a una afirmación, no a dos, como todos los demás que vimos. Simplemente sirve para negar a la afirmación que viene a continuación.

3.2. Cuantificadores

Además de los conectores lógicos, tenemos otro tipo de frases que suelen aparecer (aunque a veces disfrazadas) en los problemas, las cuales nos hablan sobre la cantidad de cosas con las que estamos tratando o buscando, y es por eso que se llaman *cuantificadores*.

3.2.1. "para todo"

Muchos problemas utilizan este cuantificador, pues sirve para decir que todo elemento de un conjunto debe de cumplir cierta propiedad. Además de "para todo" suele usarse simplemente "todo" o una afirmación de la forma "Sea x un elemento de cierto conjunto". Por ejemplo, el problema

Sea n un entero positivo. Demuestra que 2^n es la suma de dos enteros impares.

Se puede formular de la siguiente manera.

Ejercicio 7. Demuestra que todo número de la forma 2^n con n un entero positivo es la suma de dos enteros impares.

3.2.2. "existe"

Ejercicio 8. Imagina que estás en una reunión junto con otras 5 personas, y todos ustedes se acaban de graduar de la escuela. Demuestra que 3 de ustedes estuvieron en la misma escuela o 3 fueron a distintas escuelas.

¿Cómo se puede escribir el problema anterior usando la palabra "existe"?

4. Problemas

A continuación encontrarás una pequeña lista de problemas de varios temas. ¡Recuerda leerlos bien!

Problema 1. ¿Cuántos números múltiplos de 3 y menores a 100 de la forma m^2+n^2 con n, m enteros positivos existen?

Problema 2. Sea O el centro de una semicircunferencia Γ_1 de diámetro AB. Así mismo, sea Γ_2 una circunferencia de diámetro DE, donde D y E están sobre el arco AB, y que pasa por O. Calcula la razón del área de Γ_1 y el área de Γ_2.

Problema 3. Considere los dos tableros de ajedrez de 3×3 que se muestran a continuación, en cada uno de ellos hay dos caballos blancos y dos caballos negros. Moviendo una pieza a la vez tantas veces como queramos y siguiendo el movimiento estándar del caballo en el juego de ajedrez, ¿es posible mover las piezas del tablero izquierdo de tal forma que nos quede el tablero derecho? (Nota: Nunca puede haber dos caballos en un mismo cuadrito).