TALLER DE ENTRENAMIENTO PARA SEMIFINAL
Sábado 29 de abril y jueves 4 de mayo

Elaborado por: Carlos Jiménez Díaz

COMBINACIONES, MULTICOMBINACIONES Y NEWTON

- Un **conjunto** es una colección de elementos, los cuáles no se repiten.
- Un **subconjunto** es un conjunto contenido dentro de un conjunto.

Dar ejemplos de ambas definiciones.

EJEMPLOS INTRODUCTORIOS:

1. De un grupo de 4 estudiantes quiere elegirse una comisión de 3 para que cada uno visite un museo de una lista de 3 museos. ¿Cuántas comisiones diferentes se pueden formar?

Solución: Es un ejercicio de permutaciones, tema visto anteriormente. Se pretende refrescar de manera rápida el tema. Sea A= {Carlos, Gustavo, Efrén, Quetzali} el grupo de 4 estudiantes. Realizar las permutaciones posibles de 3 estudiantes en el pizarrón.

$$4P3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 4 * 3 * 2$$

"El número de formas distintas en que se pueden ordenar r objetos de una lista de n objetos es $nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$"

2. De un grupo de 4 estudiantes quiere elegirse una comisión de 3 para que juntos visiten un museo (el mismo todos). ¿Cuántas comisiones diferentes se pueden formar?

Solución: Considerar el mismo conjunto A de estudiantes y las permutaciones de arriba. Hacerles ver que cada subconjunto de 3 estudiantes se repite 3! veces.

$$\frac{4 * 3 * 2}{3 * 2 * 1} = 4$$

OBSERVACIÓN: En el primer ejemplo se pide **ordenar** 3 elementos, en el segundo **seleccionar** 3 elementos.

"El número de colecciones (en las que el orden no importa) con r elementos que se pueden seleccionar dentro de un conjunto con n elementos, con n>=r>=1 es:

$$nCr = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Y se lee *"n combinaciones en r"*

Se define que $\binom{n}{0} = 1$

3. Once personas están formadas en la cola de las tortillas. La vendedora les dice que sólo pueden hacer fila de 7. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

4. Sea X= {a, b, c, d, e}. Escribir todos los subconjuntos de X con i)0 elementos, ii)1 elemento, iii)2 elementos, iv)3 elementos, v)4 elementos, vi) 5 elementos. Verificar que en cada caso el número de subconjuntos obtenidos sea $\binom{5}{r}$, ¿por qué se cumple?

TALLER DE ENTRENAMIENTO PARA SEMIFINAL
Sábado 29 de abril y jueves 4 de mayo

Elaborado por: Carlos Jiménez Díaz

EJERCICIOS:

1.- Calcular $\binom{6}{3}, \binom{7}{5}, \binom{3}{3}$. Inventar un problema para cada caso.

2.- Explicar porqué $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

3.- Probar la fórmula de pascal:

$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$

4.- De un grupo de 30 socios de un club se quiere elegir una mesa directiva con un presidente, un secretario y 3 equipos de 2 personas cada uno. ¿Cuántas mesas directivas se pueden formar?

5.- De un grupo de 10 niños y 15 niñas se quiere formar una colección de 5 jóvenes que tenga a lo más 2 niñas. ¿Cuántas colecciones distintas se pueden formar?

6.- En mi casa tengo 5 leones y 3 tigres. Para darles de comer los acomodo en una fila. ¿De cuántas maneras distintas puede quedar la fila si no hay distinción entre animales de la misma especie?

7.- ¿Cuántas palabras distintas se pueden escribir revolviendo las letras de la palabra MATEMATICA?

8.-En una máquina expendedora cada refresco cuesta 20 pesos. Si tengo dos monedas de 5 pesos, tres de 1 peso y 4 de 50 centavos, ¿De cuántas formas puedo introducir las monedas en la máquina para poder comprar el refresco? (No hay distinción entre monedas del mismo valor)

9.- Considérese una baraja inglesa. Se define una mano como un subconjunto de 5 cartas.

Par: Dos cartas del mismo número.
2 pares: Dos cartas del mismo número y dos cartas de otro.
Tercia: Tres cartas del mismo número
Corrida: Las 5 cartas con los números seguidos sin importar el palo
Flor:5 cartas del mismo palo
Flor escalera: 5 cartas del mismo palo con los números consecutivos
Full: par más tercia
Pokar: 4 cartas del mismo número

a) ¿Cuántos manos hay?

b) ¿Cuántas manos tienen pokar?

c) ¿Cuántas manos tienen pókar de ases?

d) ¿Cuántas manos tienen flor de espadas?

e) ¿Cuántas manos tienen flor escalera?

f) ¿Cuántas manos tienen full de dos ases y tres doses?

Teorema del binomio de Newton: Sean a y b números enteros y sea n un número natural. Entonces:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

<u>Demostración:</u>

Veamos $(a+b)^n$ significa que tenemos que multiplicar (a+b) consigo mismo n veces. Desarrollando el producto tendremos términos de la forma $a^{n-k}b^k$, con 0<=k<=n. Notemos que $a^{n-k}b^k$ aparece cada vez que seleccionamos b en k de los factores y a en el resto, por lo que cada término aparece $\binom{n}{k}$ veces. Al agrupar términos semejantes tenemos la fórmula deseada.

EJEMPLO:

1.-Desarrollar $(a+2b)^5$

El triángulo de Pascal está definido como el triángulo de números en el que el renglón n aparecen los n+ 1 números:

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$$

A continuación, se muestran los primeros 5 renglones del triángulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

Hacer notar que los números del renglón n son los coeficientes que aparecen en el desarrollo de $(a+b)^n$ así como la fórmula de Pascal antes demostrada.

EJEMPLO:

1.-Con la ayuda del Teorema del Binomio de Newton y del Triángulo de Pascal desarrollar $(3a-b^2)^6$

EJERCICIOS:

TALLER DE ENTRENAMIENTO PARA SEMIFINAL
Sábado 29 de abril y jueves 4 de mayo

Elaborado por: Carlos Jiménez Díaz

1.- ¿Cuál es el desarrollo de $(a+b+c)^3$? Obtener una fórmula para el desarrollo de $(a+b+c)^n$

2.-Encontrar el coeficiente del término a^5b^2 en el desarrollo de $(a+b)^7$.

4.- Encontrar el coeficiente del término a^5b^2cd en el desarrollo de $(a+b+c+d+e)^9$.

5.-Probar que $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$

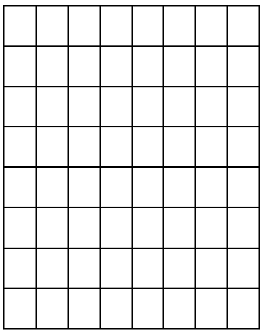
7.-Probar que $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$

PROBLEMAS DE TAREA:

1.- ¿Cuántos números menores que un millón hay tales que en sus cifras tienen exactamente dos 9's y un 1? Y. ¿Cuántos números menores que un millón hay tales que en sus cifras aparece al menos un 9?

2.- ¿De cuántas maneras pueden ordenarse en un estante 3 cuadernos rojos, 4 azules y 2 verdes, si los verdes no deben quedar juntos?

3.- Considere la siguiente figura:



¿Cuántos caminos hay de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha si sólo se permite avanzar a la derecha y hacia abajo?

4.- Probar que:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$$

5.- Encontrar el término que no contiene a x en el desarrollo de $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^9$

6.- Encontrar una fórmula para el desarrollo de $(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)^n$