COLORACIÓN E INVARIANZA

Erik Orson Delgado Romo

1. Coloración e invarianza

Tanto la coloración como la invarianza son técnicas de resolución de problemas y esquemas de demostración que se utilizan dentro de la combinatoria, la teoría de números y otras áreas de las matemáticas.

2. Invarianza

La invarianza se utiliza en problemas relacionados con juegos, procedimientos o algoritmos. La técnica consta de notar alguna propiedad que aparezca en cada desarrollo posible de nuestro problema y utilizarla para probar alguna otra. Un ejemplo básico es el siguiente: Suponiendo que tengamos una cantidad infinita de billetes de 10, 20 o 50 pesos, ¿Sera posible que podamos pagar 857 pesos sin recibir cambio? La respuesta es no, por el simple hecho de que sin importar que cantidad de billetes tengamos de cada tipo, la cantidad de dinero que tengamos siempre será un múltiplo de 10. En problemas reales nunca será tan fácil, pero sirve checar propiedades fáciles como la paridad, divisibilidad, suma, resta o producto, de los datos del problema cuando hagamos casos.

Un concepto relacionado es el de la monovarianza, en donde en vez de fijarnos en que propiedades se mantienen, nos fijamos en algún cambio constante. Un caso muy simple es checar si el tamaño del elemento más grande incrementa o decrementa a cada etapa del proceso que se da en el problema. Si solo pudiera tomar valores mayores o iguales que cero, y a cada etapa del proceso se vuelve más pequeño, se puede concluir que este procedimiento tiene que terminar.

Como ejemplo, probaremos la validez de una variación del algoritmo de Euclides.

Nota: el ejemplo es algo elaborado.

El algoritmo de Euclides sirve para encontrar el máximo común divisor de dos números, se basa en la siguiente propiedad del máximo común divisor (mcd) de dos números:

$$mcd(a, b) = mcd(res(a, b), b)$$

Donde $res(a, b)$ es el residuo que queda de dividir a **a** entre **b**.

Propongo que el siguiente procedimiento siempre calculara el máximo común divisor de dos números **a** y **b**.

Empezamos con dos valores **a** y **b**, ambos mayores que cero. Usaremos tres variables auxiliares **m**, **n** y **r**. *Antes de empezar haremos que **m** sea igual a **a**, **n** sea igual a **b**, y **r** sea igual a* $res(a,b)$.

Repetiremos el siguiente procedimiento mientras que r sea mayor que 0:

-Hacemos que m sea igual a n.

-Hacemos que n sea igual a r.

-Usando los nuevos valores de m y n, hacemos que r sea igual a la $\boldsymbol{res(m,n)}$.

Se supone que cuando terminemos el procedimiento el valor de n será igual al $minimo\ comun\ divisor\ de\ a,b$.

Para probar la validez del anterior procedimiento, probaremos dos diferentes hechos:

1-Que tras cada iteración de proceso $m > 0, n > 0$ (esto se tiene que probar para evitar que se tenga una situación en donde tienes que sacar el residuo de dividir un numero entre cero) y $mcd(m,n) = mcd(a,b)$ (esta invarianza la probaremos por medio de la propiedad que enseñamos arriba).

2-Que el procedimiento termina (esto lo hacemos por medio de una monovarianza).

¿Por qué basta con probar estas dos aserciones? Si $mcd(m,n) = mcd(a,b)$ para cada iteración, como el proceso termina cuando $r = res(m,n) = 0$, para estos últimos valores de **n, m**, **n** divide a **m,** por lo que $mcd(m,n) = n$. Como ya probamos que $mcd(m,n) = mcd(a,b)$ para cualquier iteración, entonces el valor final de **n** será igual a $mcd(a,b)$.

Probaremos la primera aserción (la invarianza) por medio de inducción sobre la cantidad de iteraciones.

Nuestro caso base será el de cero iteraciones, donde obviamente es cierta la propiedad por el hecho de que así inicializamos los valores. Ahora para realizar la inducción supongamos que tras alguna cantidad de iteraciones es cierto que $m > 0, n > 0$ y $mcd(m,n) = mcd(a,b)$. Ahora, supongamos que se va a realizar otra iteración (o sea que r>0). Tras la iteración los valores de **m, n** y **r** cambiaran según las reglas establecidas por el procedimiento, estos nuevos valores los llamaremos **m'**, **n'**, y **r'**. Ahora nuestra tarea será probar que $mcd(m',n') = mcd(a,b)$, y la forma más fácil de hacer esto será relacionándolos con la **m** y **n** de la iteración anterior, ósea que necesitaremos que probar que $mcd(m',n') = mcd(m,n)$ (además de también probar que $m' > 0, n' > 0$). Como $m' = n$ y $n' = r$ y tanto r>0 como n>0, por el hecho de suponerlo, se cumple que $m' > 0, n' > 0$.

Ahora por el hecho de que: $mcd(a,b) = mcd(res(a,b),b)$. Como $m' = n,\ n' = r = res(m,n)$, entonces $mcd(m',n') = mcd\big(n, res(m,n)\big) = mcd(n,m)$ y como $mcd(m,n) = mcd(a,b)$ por nuestra suposición hemos probado que $mcd(m',n') = mcd(a,b)$. Por lo tanto, para cualquier iteración del procedimiento queda como invariante que $mcd(m,n) = mcd(a,b)$ y que $m' > 0, n' > 0$.

Para poder probar la segunda aserción denominaremos al valor de **r** después de la i-esima iteración como r_i. Notaremos que $r_0 = res(m,n) = rem(a,b) \geq 0$, y que toda $r_i \geq 0$ porque un residuo siempre es un entero no negativo. Si encontramos el valor del r_{i+1}, utilizando los valores de **m** y **n** para la iteración i+1, llamémoslos **m’** y **n’,** que se calcularon en base a los de la iteración i-esima, llamémoslos **m** y **n,** descubrimos que $r_{i+1} < r_{i+1}$:

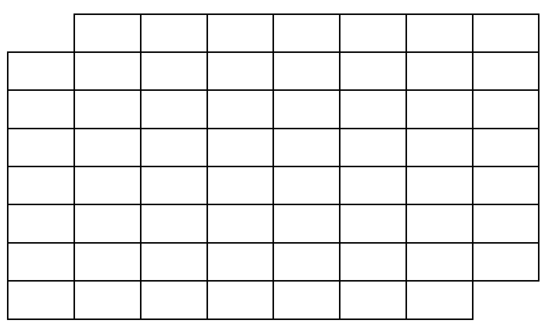
$$r_{i+1} = res(m',n') = res(n,r) = res\big(n, res(m,n)\big) = res(n, r_i) < r_i$$

Como r_i es un entero, $r_i \geq 0$ y en cada iteración el valor decrementa, entonces en algún punto llegara a ser cero. Este último hecho que probamos es una monovarianza.

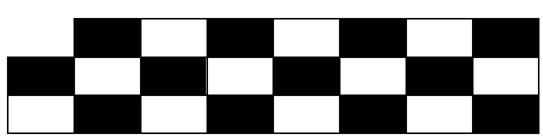
3. Coloración

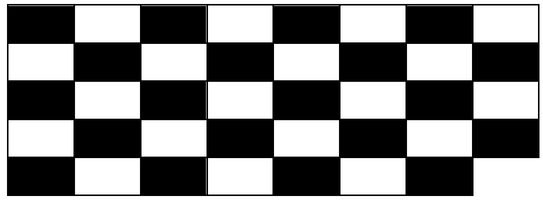
La técnica de coloración es utilizada dentro de la combinatoria para solucionar algunos tipos de problemas, aunque los que más comunes son sobre encontrar si se puede cubrir una cuadrícula con alguna figura.
Un ejemplo ilustrativo sería el siguiente.

¿Podemos cubrir la siguiente cuadrícula con dominós de tamaño 2x1, de manera que ninguno se encime a otro, ni salga de la cuadrícula?



Por el hecho de que tenemos una cuadrícula de 8x8, pudiéramos notar que es muy parecida a una cuadrícula de ajedrez sin sus dos esquinas blancas.





Ahora podemos notar que siempre que pongamos un dominó sobre la cuadrícula, el dominó cubrirá una cuadrícula negra y una cuadrícula blanca. Entonces, si se pudiera cubrir la cuadrícula con alguna cantidad de dominós, la cantidad de cuadrículas blancas que se cubrieron tiene que ser igual a la cantidad de cuadrículas negras que se cubrieron. Esto es una contradicción, porque sabemos que en nuestra cuadrícula no hay la misma cantidad de cuadrículas negras que blancas.

4. Ejercicios

1. Juanito escribe en un pizarrón los números del 1 al mil. Si en cada turno agarra 2 números **a** y **b** al azar, los borra, y añade al pizarrón a **a-b.** Sera posible que en algún momento solo quede el número 567 en el pizarrón.

2. Dada una cuadrícula de $n \times m$, y dominós de $1 \times p$ donde **p** es un primo. Demuestra que solo se pude cubrir completamente la cuadrícula si **p** divide a **m** o a **n**.

3. Los enteros del 1 al 10 se dibujan en pizarrón. Si Pepito puede elegir tres de ellos, borrarlos y dibujar en el pizarrón a $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, ¿Cuál es el número más grande que puede haber en el pizarrón?

5. Problemas

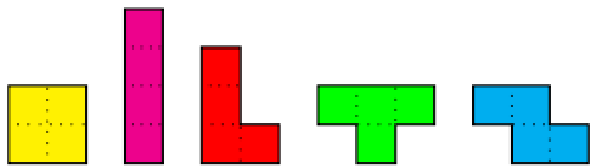
1. Alicia y Roberto tienen una barra de chocolate que se divide en una cuadrícula de 10×10. Ambos quieren jugar y se inventan las siguientes reglas, en cada turno del juego un jugador puede: comerse un rectángulo de chocolate completo, o cortar algún rectángulo de chocolate en dos partes (cortando a través de alguna de las líneas de la cuadrícula). Si Alicia es la segunda en jugar, y el que juegue el último turno, ¿Existe alguna estrategia que permita que ella gane?
2. En el parlamento de Sikinia, cada miembro tiene a lo más tres enemigos. Si para llevar a los miembros del parlamento a una convención se tienen que hospedar a los miembros en hoteles, demuestra que se pueden hospedarlos en dos hoteles sin que cada miembro tenga a más de un enemigo en su mismo hotel.
3. Si empezamos con los puntos $(-5,10), (8,7), (-3,4), (6,5), (9,4)$ en el plano cartesiano. En cada etapa puedes hacer una de dos cosas:

-Elegir un punto y moverlo una unidad hacia arriba (en el eje **y**), y elegir otro y moverlo una unidad hacia abajo.

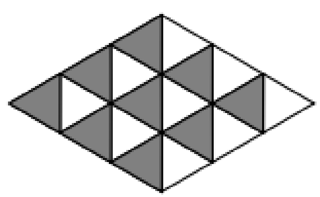
-Elegir un punto y moverlo una unidad hacia la derecha (en el eje **x**) y eliges otro y lo mueves una unidad hacia la izquierda.

Encuentra todas las coordenadas (x, y), tales que después de alguna cantidad de etapas se puedan llevar los 5 puntos.

4. Se ponen **n** puntos azules y **n** puntos rojos en el plano de manera que ningunos tres sean colineales. Demuestra que hay una manera de unir cada punto azul con un rojo, de manera que ninguno de los segmentos de unión cruce con otro.
5. Encuentra para cuales de los siguientes de tetraminos es posible cubrir una cuadrícula de 10x10.



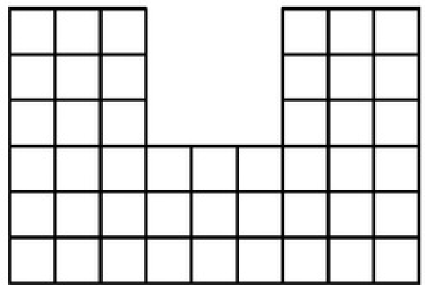
6. (OMA Selectivo 2010) Ariel y Berta juegan en un tablero con forma de rombo de lado n y ángulos de 60◦ y 120◦, dividido en 2n 2 triangulitos equiláteros mediante paralelas a los lados y paralelas a la diagonal menor del rombo. Ariel usa una ficha roja y Berta una ficha azul que inicialmente están una en cada una de las casillas de las esquinas donde el tablero forma ángulos de 60◦. Los jugadores mueven por turnos sus fichas a una casilla vecina (con un lado común). Un jugador gana si logra comer la ficha del otro cayendo en la casilla en la que está la ficha de su oponente, o si llega a la casilla opuesta a la de su salida antes que su rival haga lo propio. Si Ariel hace la primera jugada, determine si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora.



7. En un salón de clase están sentados los alumnos formando un arreglo rectangular de 5×7. La maestra que quiere hacer una dinámica les pide a todos los alumnos que intercambien de lugar con un compañero vecino, moviéndose un lugar ya sea a la izquierda, a la derecha, adelante o atrás de su lugar. Pepito, que sabe de matemáticas, le dice a la maestra que esto no es imposible ¿Tiene razón Pepito?
8. Una cuadrícula de 3 filas y 52 columnas se cubre con dominós de 2x1. Si exactamente 2 de los dominós se colocaran de manera vertical, ¿De cuántas

diferentes formas se puede cubrir? Nota: no se puede dejar ninguna cuadrícula descubierta, ni dejar que algún dominó se salga de la cuadrícula.

9. La figura de abajo tiene 45 cuadrados, y puede ser cubierta por 11 tetraminos tipo L, junto con un monomino. ¿En cuántas diferentes posiciones de la cuadrícula se puede poner el monomino?



10. Si se empieza con el conjunto {2, 3,4}, y en cada turno se escoge un número **a** y **b**, y los reemplazas con $0.6a - 0.8b$ Y $0.8a + 0.6b$. Después de alguna cantidad de turnos se puede llegar a alguno de los siguientes conjuntos:
    a. {1, 3,5}.
    b. {0, 2,5}.
11. En la isla de Camelot viven camaleones, 13 son grises, 15 cafés y 17 rojos. Si dos camaleones de distintos colores se hablan, ambos cambiaran al tercer color.
    a. ¿Sera posible que todos los camaleones se vuelvan del mismo color?
    b. ¿Sera posible que haya los 15 camaleones de cada color?
12. Un dragón tiene 100 cabezas. Si un caballero corta 15, 17, 20 o 5 cabezas, crecen de nuevo 24, 2, 14 o 17 cabezas respectivamente. Si se acaban las cabezas del dragón, el dragón ha muerto. ¿Habrá una manera de matar al dragón?