Entrenamiento de Caminos y Separadores

Joshua S. González Torres joshua.gonzalez@cimat.mx
Olimpiada Básica de Matemáticas en Guanajuato

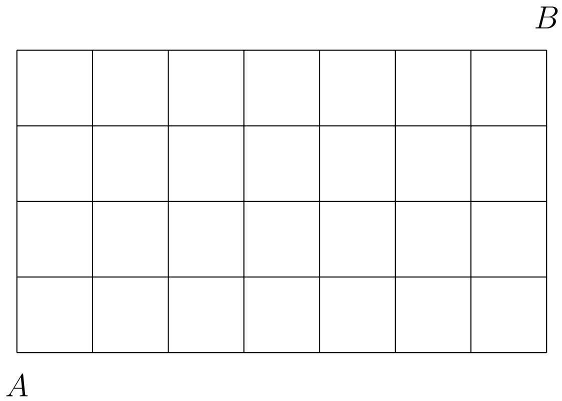
9 de mayo de 2022

---

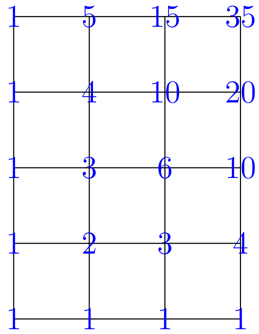
1. Caminos

Es común en libros de matemáticas y algunos selectivos de olimpiada encontrarse con este tipo de ejercicios:

Ejemplo 1. Supongamos que queremos llegar del punto A al punto B siguiendo las líneas de la cuadrícula y moviéndonos únicamente hacia la derecha o hacia arriba. ¿De cuántas maneras puede realizarse este trayecto?



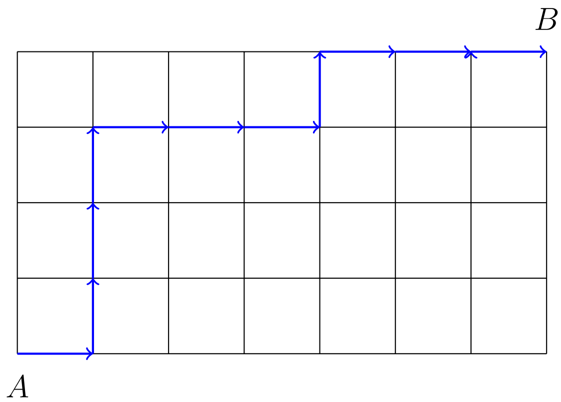
Si bien es posible contar los caminos uno a uno de manera suficientemente ordenada para encontrar la respuesta correcta, la veracidad del resultado depende de nuestra capacidad de contar ordenadamente una cantidad desconocida (y posiblemente muy grande) de caminos, la cual no es del todo confiable. Así, se nos ocurre contar de una manera más inteligente: nos damos cuenta de que la cantidad de caminos que llevan a un punto es la suma de la cantidad de caminos a cada punto que nos lleva dicho punto. De esta forma, si en cada vértice de una cuadrícula de 5×4 vértices escribiéramos sobre cada uno la cantidad de caminos que llevan a éste, resultaría en algo de este estilo:



Como podemos observar, la cantidad de caminos crece bastante rápido, por lo que intentar calcularla de esta manera para nuestro problema puede resultar en errores aritméticos fatales. Más aún, si nos hubieran preguntado para una cuadrícula aún más grande, la probabilidad de cometer un error en nuestras cuentas (sin considerar el tiempo que tomaría realizarlas) es demasiado alta para nuestros propósitos. Así, debemos encontrar una mejor manera de contar.

Definamos un "paso" como el trayecto que se recorre de un vértice a uno adyacente en nuestra cuadrícula. Observemos ahora que cualquier camino de A a B que se tome consiste de 11 pasos: 7 pasos horizontales que denotaremos $\rightarrow$ y 4 pasos verticales que denotaremos $\uparrow$. Así, cada camino es una "palabra" de 11 "letras": 7 "letras" $\rightarrow$ y 4 " letras $\uparrow$; por lo que nos podemos imaginar esta "palabra" como una fila de 11 espacios de los cuales hay que escoger 7 para las $\rightarrow$ (las posiciones de las otras 4 letras quedan determinadas por esta acción). Por nuestros conocimientos de combinatoria, sabemos que esto es $\binom{11}{7}$, por lo que hay $\binom{11}{7}$ caminos distintos de A a B.

Un par de cosas importantes que hay que notar es que, efectivamente, cada camino se puede describir con una y solamente una palabra y cada palabra describe uno y sólo un camino.



$\Longleftrightarrow \rightarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow.$

En general, para una cuadrícula de $m \times n$ vértices, podemos contar cuántos caminos existen de la esquina inferior izquierda a la esquina superior derecha si sólo se puede avanzar hacia arriba y hacia la derecha al considerar el problema una palabra de $(m-1)+(n-1)$ letras, con $m-1$ letras de tipo $\rightarrow$ y $n-1$ letras de tipo $\uparrow$:

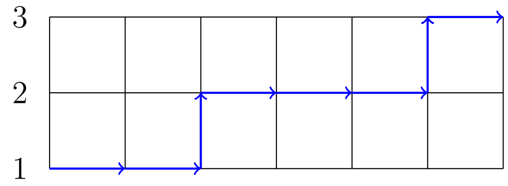
$$\text{Caminos} = \binom{m+n-2}{n-1}.$$

Si esta fórmula sólo tuviera un uso, sería poco conveniente redactar todo un entrenamiento al respecto, por lo que el lector debería suponer que podemos utilizar este razonamiento más allá de problemas que contienen cuadrículas. Veamos un ejemplo de la extrapolación de la idea.

Ejemplo 2. Los números *chidos* son números menores a 1000000 y mayores a 99999 tales que sus dígitos son 1, 2 y 3 y éstos se encuentran en orden no decreciente dentro del número. Por ejemplo, el número 112223 es chido. ¿Cuántos números chidos hay?

Solución. *Notemos primero que, por lo establecido en el enunciado, los números chidos tienen todos 6 cifras. Puesto que los dígitos están en orden no decreciente, el siguiente dígito puede ser igual al anterior o mayor. Esto nos describe cierto "movimiento hacia la derecha o hacia arriba" entre los valores de los dígitos, por lo que nos vemos motivados a definir una cuadrícula tal que cada camino de la cuadrícula describa un número y cada número se traduzca en un camino.*

Consideremos una cuadrícula de 7×3 *vértices. Diremos que cada paso horizontal representa un dígito del número mientras que el número de fila representará el valor de ese dígito. Así, el número* 112223 *se representa como*



Como cada número se representa mediante un camino y cada camino describe a un número, contar la cantidad de caminos equivale a contar la cantidad de números chidos. Calcular la respuesta se reduce entonces a calcular $\binom{7+3-2}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$*.*

Se puede notar que un problema que parece no tener relación alguna con caminos en una cuadrícula puede convertirse (mediante una construcción inteligente) en uno.

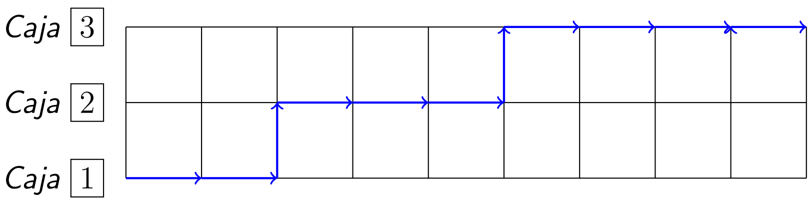
2. Separadores

Veamos ahora un nuevo tipo de problema sin aparente relación al tema anterior.

Ejemplo 3. Se tienen 9 pelotitas idénticas las cuales se quieren repartir entre 3 cajas distintas. ¿De cuántas maneras puede realizarse esto si no se requiere un mínimo de pelotas por caja?

Para sorpresa del lector, este problema también puede resolverse usando caminos.

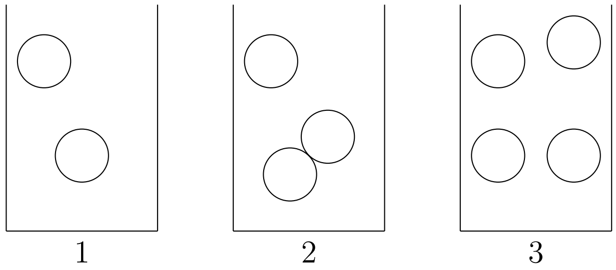
Solución (de Mateo Pérez Parra Martínez)**.** *Diseñamos una cuadrícula de* 10×3 *vértices, donde los pasos horizontales representan las pelotitas y las filas, las cajas. Así, si, por ejemplo, se tienen* 2 *pelotitas en la caja* 1*,* 3 *en la caja* 2 *y* 4 *en la caja* 3*, el camino sería*



Nótese que cada repartición de las pelotitas se puede representar como un camino con tantos pasos horizontales como pelotitas haya en la caja en dicha repartición (pueden incluso ser 0*) y todo camino representa una repartición por el mismo motivo. Así, basta con contar la cantidad de caminos que hay en esta cuadrícula, lo cual es sencillo:* $\binom{10+3-2}{3-1} = \binom{11}{2} = 55$*.*

Aunque esta solución es perfectamente funcional y correcta, no está de más examinar otra.

Solución (Planteamiento de Separadores)**.** *Consideremos una palabra de* 11 *letras. De éstas,* 9 *de ellas van a ser "*$\circ$*", mientras que las otras dos serán "*$|$*". Ahora, la cantidad de* $\circ$ *que queden a la derecha del primer* $|$ *representarán las pelotitas que estarán en la caja* 1*. Las que quedan entre los* $|$*, representarán a las que estarán en la caja* 2*. Finalmente, las pelotitas que queden a la derecha del segundo* $|$ *representarán a las que queden en la caja* 3*. Notemos que cada repartición de las pelotitas se puede representar con una de estas palabras y cada palabra puede interpretarse como una repartición.*



$\iff \circ\circ \mid \circ\circ\circ \mid \circ\circ\circ\circ.$

Así, en nuestra palabra de 11 letras, elegimos dos lugares para que sean nuestros $\mid$ (nuestros separadores); esto puede hacerse de $\binom{11}{2} = 55$ maneras, por lo que hay 55 maneras de repartir las pelotitas.

Al igual que con la fórmula de los caminos, podemos generalizar esta idea para n objetos en k cajas: Para k cajas, necesitamos $k-1$ separadores en nuestra palabra, por lo que ésta tendrá $n+k-1$ espacios. Así, la cantidad de palabras, es decir, la cantidad de posibles reparticiones, será $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Al igual que en la sección anterior, se presentará un ejemplo en el cual se pueda aplicar una extrapolación de la idea expuesta.

Ejemplo 4. ¿Cuántos números menores a 10000 son tales que la suma de sus dígitos es 9?

Solución. *Debido a que nuestro número es menor a 10000, éste debe tener, a lo más 4 cifras. Si pensamos a los dígitos como cajas para contener una cierta cantidad de unidades (el valor de cada dígito), podemos expresar el problema como las maneras de repartir 9 unidades/pelotitas en 4 dígitos/cajas. Cada número se puede expresar como una de estas reparticiones y cada repartición de estas 9 unidades en 4 cajas representa un número de a lo más 4 dígitos, por lo que hay tantas reparticiones como números que buscamos. Aplicando entonces la fórmula vista, hay $\binom{9+4-1}{4-1} = \binom{12}{3}$.*

3. Resumen

De manera general, podemos establecer un sistema ordenado para ordenar nuestro procedimiento al utilizar las herramientas expuestas en este entrenamiento.

Si quiero usar caminos:

1. Dibujar la cuadrícula.
    - ¿Qué significan mis columnas?, ¿cuántas necesito?
    - ¿Qué significan mis filas?, ¿cuántas necesito?
2. Establecer la relación camino $\iff$ objeto.
    - ¿Cómo se traduce el objeto a un camino y viceversa?
    - ¿Todos los caminos nos describen un objeto?
3. Descartar los casos extremos.
    - ¿Hay caminos que describen objetos no deseados para nuestro conteo?

Si quiero usar separadores:

1. Establecer la relación del problema con las cajas y las pelotitas.
   1.1 ¿Puedo tener cajas vacías?
   1.2 ¿Cuántas pelotitas tengo?
   1.3 ¿Cuántas cajas tengo?, ¿cuántos separadores necesito para tantas cajas?
2. Calcular la cantidad arrojada por la fórmula.
3. Descartar los casos que no sean de interés para el problema.

Nótese que estos procedimientos pueden variar de acuerdo al problema que se presente. No son instructivos, sino guías base para entender el uso de estas herramientas.

4. Ejercicios

Se han recopilado algunos ejercicios para practicar los conceptos. Nótese que pueden resolverse con ambas herramientas presentadas en este entrenamiento.

Ejercicio 1. En una tienda se dan 4 tipos de dulces. ¿De cuántas formas se pueden comprar 10 dulces?

Ejercicio 2. ¿De cuántas maneras se pueden servir 15 vasos de jugos si se tienen jugos de manzana, mango, piña, naranja y guanábana?

Ejercicio 3. Resuelve el Ejemplo 3 pero ahora no puede haber cajas vacías.

Ejercicio 4. ¿Cuántos números naturales de 4 cifras son tales que sus cifras suman 10?

Ejercicio 5. Sea n un entero positivo.

1. Encuentra el total de soluciones enteras no-negativas de $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$.
2. Encuentra el total de soluciones enteras positivas de $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$.

Ejercicio 6. Encuentra el total de tripletas ordenadas (x, y, z) de enteros no negativos tales que $x + y + z \leq 20$.

Ejercicio 7. Encuentra el total de cuartetas ordenadas de enteros (a, b, c, d) tales que $a + b + c + d = 100$ y además que $a \geq 30$, $b > 21$ y $c, d \geq 1$.