Olimpiada Básica de Matemáticas en Guanajuato

@OBMGuanajuato | 3 de septiembre del 2022

Áreas

Alfredo Hernández Estrada

1. Introducción

En los cursos de geometría, ya sea de matemáticas en la escuela o como preparación para algún concurso, el tema de áreas es uno de los primeros en ser vistos. Por lo general se nos enseñan solo aplicar formulas sin razonar, pero en concursos de matemáticas lo fundamental es razonar. Este material esta pensado para alumnos de primaria que estén interesados en participar en algún proceso de selección para algún concurso de matemáticas o bien cualquier persona interesada en dar un repaso sobre los principios básicos de este tema. A partir de ahora los ejemplos que presentemos estarán en términos de unidades u y las áreas por supuesto en unidades cuadradas u^2.

2. Formulas

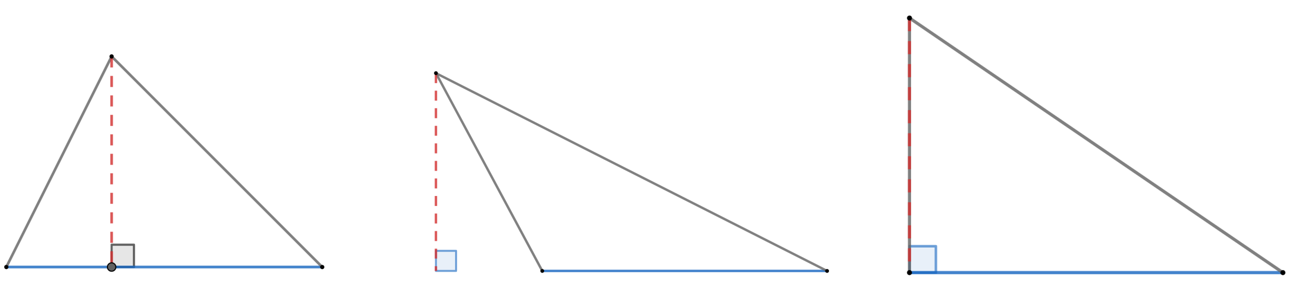
Lo primero que aremos sera recordar las formulas de áreas básicas aprendas desde la educación primaria, no nos detendremos a analizar cada una, pues no queremos aumentar la complejidad de este documento.

2.1. Triangulo

Recordando, esta tal vez sea una de las primeras formulas que se ven en la escuela primaria, y aunque existe mas de una formula para esta figura, nosotros aremos mención únicamente a la básica.

$$\acute{A}rea = \frac{Base \times Altura}{2}.$$

Si bien esta formula puede parecer simple, en ocasiones puede generar confusión la ubicación de la base, por lo que a continuación presentamos diferentes configuraciones de la figura. En las figuras de arriba



(a) (b) (c)

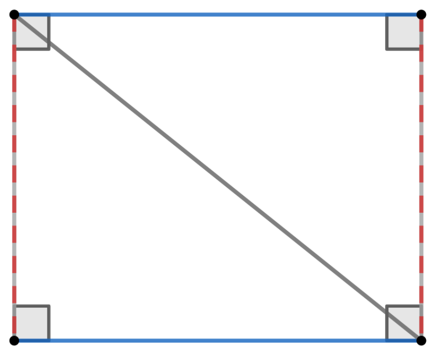
mostramos posibles configuraciones del triangulo y en cada una remarcamos en rojo a la altura y en azul a la respectiva base.

2.2. Rectángulo

De nuevo una de las formulas mas repasadas a nivel básico, la formula en este caso es mas simple que la del triangulo

$$\acute{A}rea = Base \times Altura.$$

Algo interesante que podemos notar en esta figura, es que si la dividimos por cualquier diagonal y obtenemos la siguiente figura. la figura que obtenemos es la unión de dos rectángulos, con sus respectivas bases en

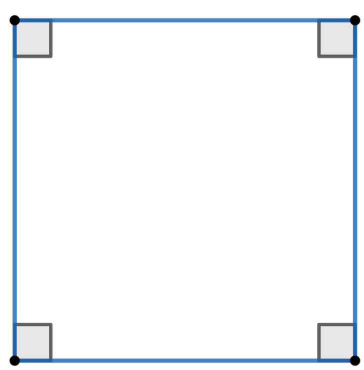


los segmentos azules, que sabemos son iguales, y ambos con la misma altura, los segmentos rojos, y si aplicamos la formula anterior el área de cada uno de estos triángulos es igual a

$$\frac{Base \times Altura}{2},$$

por lo que al sumar el área de ambos triángulos, que es la misma, obtenemos de echo el área de el rectángulo completo. Esta técnica para encontrar áreas es llamada " *Triangulación de Polígonos*", este nombre cobrara sentido mas adelante.

Otro aspecto importante a resaltar es el caso del cuadrado que también forma parte de la familia de



los rectángulos, en el cual la formula para su área a pesar de ser la misma se suele ver como

$$\acute{A}rea = Lado \times Lado.$$

2.3. Paralelogramo

Recordando la definición, esta figura es un cuadrilátero con dos pares de lados paralelos, la formula en este caso no es nada nuevo,

$$\acute{A}rea = Base \times Altura.$$

similar a la formula del triangulo. Es importante el caso anterior, el rectángulo, es de echo un paralelogramo pero la altura de este es de echo uno de sus lados. un ejercicio interesante es hacer lo siguiente.

- Primero sobre nuestra figura original recortamos el siguiente triangulo azul

- Una vez recortado lo colocamos como sigue

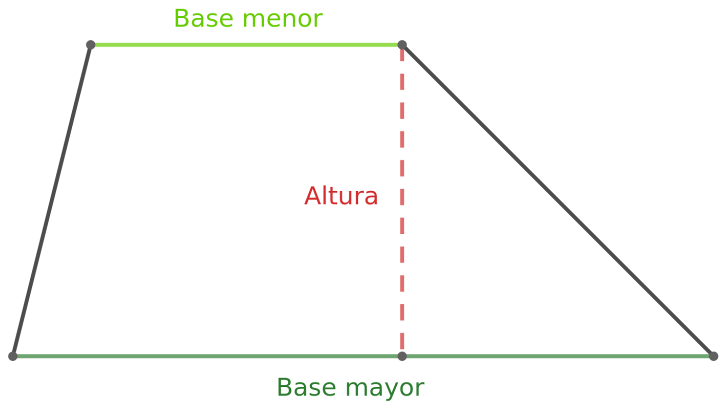
Con esto podemos ver la figura que se forma es un rectángulo con la misma área que el paralelogramo original, y esto confirma la formula del área del paralelogramo, pues nuestro nuevo rectángulo además de tener la misma base que el paralelogramo comparte la altura de este como uno de sus lados.

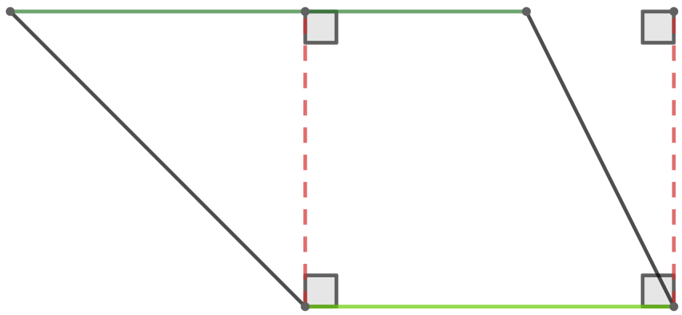
2.4. Trapecio

Aun no acabamos con los cuadriláteros, y de todos las figuras vistas hasta ahora, esta figura quizás tenga la formula mas difícil de recordar

$$\acute{A}rea = \frac{(Base\ mayor + Base\ menor) \times Altura}{2}.$$

Para entender esto de mejor manera, observe la siguiente figura en la que se nombra cada parte del trapecio. Si bien hacemos distinción entre las bases como base mayor y base menor, es importante notar que el orden de estas no importa en la formula, por lo que dependiendo de la figura estar podrían estar en cualquier posición pero la formula sigue funcionando, basta comprobar que en verdad es un trapecio, un cuadrilátero con solo un par de lados paralelos. Un ejercicio interesante sobre esta figura es el de triangular la misma y tratar de llegar a la formula por medio de la formula de triangulo. Si bien no vamos a resolver esto se deja como ejercicio opcional al lector.



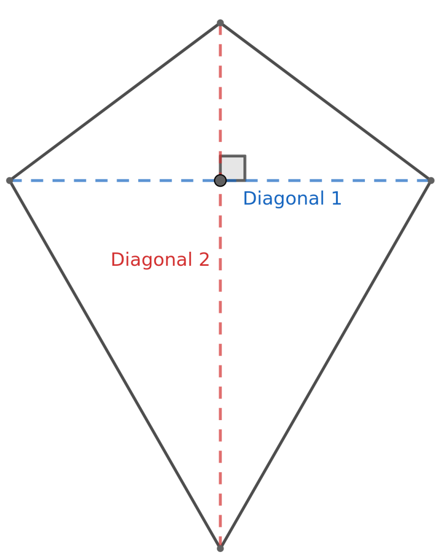


2.5. Deltoide

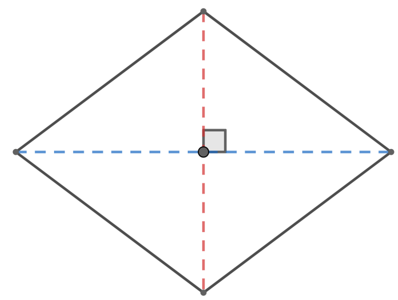
Esta es una de esas figuras que muy poca gente conoce por su nombre, y comúnmente es llamada "papalote", que no debe confundirse con el rombo. En general para reconocer a un deltoide basta comprobar que sus diagonales son perpendiculares y que tienen dos pares de lados iguales. Al igual que la figura anterior, necesitamos conocer las partes de esta figura geométrica para entender la formula de su área

$$\acute{A}rea = \frac{Diagonal\ 1 \times Diagonal\ 2}{2}.$$

En este formula podemos notar que el orden de las diagonales no nos importa, basta tener a ambas diagonales para aplicar la formula, en cualquier orden.



Pese a que mencionamos que no debía confundirse esta figura con un rombo, no es difícil notar que el rombo es de echo un deltoide. Si hicimos esta distinción fue para hacer notar que la familia del deltoide incluye figuras distintas de un rombo, como lo mostrada en la figura de arriba, que no tiene todos sus lados iguales. De nuevo es un ejercicio interesante triangular a la figura y tratar de llegar a la formula por medio de la suma de áreas, usando solo la formula del triangulo y como hint se recomiendo recordar que las diagonales son perpendiculares entre ellas y usar la triangulación correspondiente a una de ellas.



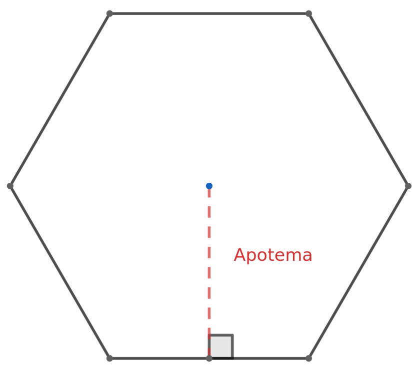
2.6. Polígonos regulares

La penúltima sección, y en este caso hablaremos de un conjunto extenso de figuras geométricas. Usaremos como ejemplo al hexágono regular, pero debe entenderse que esta formula abarca el conjunto de figuras regulares con 5 o mas lados. En este caso por figura regular nos referimos a aquellas en las que tanto sus lados como sus ángulos son todos iguales respectivamente.

La formula en este caso es la siguiente

$$\acute{A}rea = \frac{perimetro \times apotema}{2}$$

donde el apotemas es la perpendicular desde el centro de la figura hacia a uno de sus lados. Sobre esta



formula hay dos cosas a resaltar

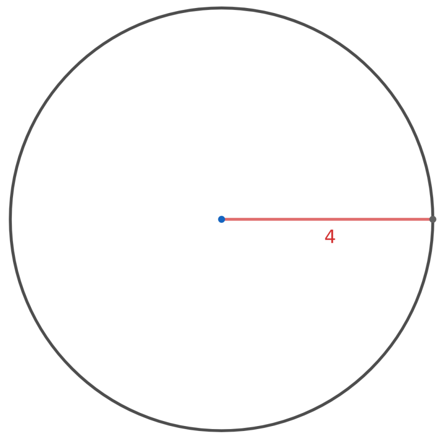
- Como las figuras son regulares todos sus lados son iguales, por lo que el perímetro se calcula simplemente de multiplicar uno de sus lados por la cantidad de lados de la figura.
- De nuevo podemos llegar a esta formula triangulando y sumando las áreas de los respectivos triángulos, en este caso la triangulación de la figura que nos permite hacer esto es la que obtenemos de unir el centro de la figura con cada uno de los vértices de la figura.

2.7. Circulo

Por ultimo, la formula que probablemente cause mas confusión

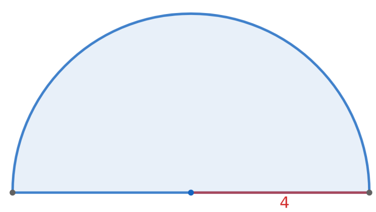
$$\acute{A}rea = \pi \times (radio)^2.$$

En esta la parte $(radio)^2$ significa simplemente $(radio) \times (radio)$. Ahora, la parte en la que se comenten mas errores en los concursos de matemáticas, en la escuela se nos enseña que $\pi = 3{,}14159265...$ y nos hacen sustituir esto en todas las operaciones, pero en este caso para los problemas de olimpiada nos bastara conocer el resultado en términos de π. Por ejemplo en la siguiente figura El área de este circulo es igual a



$$\begin{aligned} \acute{A}rea &= \pi \times (radio)^2 \\ &= \pi \times (4)^2 \\ &= \pi \times 4 \times 4 \\ &= 16\pi. \end{aligned}$$

El área del circulo es 16π, esto es 16 veces el valor de π, y no necesitamos sustituir su valor numérico. Otra cosa a tener en cuenta es que no siempre aparece el circulo completo, por ejemplo, en la siguiente figura presentamos una sección circular que es la mitad de un circulo (esta figura geométrica es conocida semicírculo) para calcular el área de esta figura basta obtener el área del circulo completo, que sabemos



por lo calculado anteriormente que es 16π, y simplemente dividimos esto entre 2, pues es la mitad de la circunferencia. Así, obtenemos que el área de este semicírculo es de 8π.