Entrenamiento Geometría
Israel Bonal Rodríguez
israel.bonal@cimat.mx
6 de Agosto de 2020

CIMAT

Áreas

Dada una figura en el plano (que no sea demasiada extravagante), existe la noción de cual es su área. Para las figuras más básicas como los rectángulos el cálculo del área resulta sencillo de definir como el producto de sus dos lados perpendiculares entre sí. Teniendo esto en cuenta podemos extender el cálculo de áreas a cualquier triangulo de la siguiente manera.

Teorema: Dado un triángulo ABC cuya longitud del lado BC es a y longitud de la altura desde A es h, entonces el área del triángulo ABC es igual a

$$\frac{a \cdot h}{2}$$

y se le suele denotar por (ABC).

Adicional a esto una forma alternativa de calcular el área de un triángulo es la siguiente.

Teorema: Sean b, c y α las longitudes de los lados CA, AB y la medida del ángulo $\measuredangle BAC$ de un triángulo ABC, respectivamente. Entonces se cumple que

$$(ABC) = \frac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen}(\alpha)}{2}$$

Semejanzas y congruencias

Una herramienta muy usada dentro de problemas de olimpiada es la busqueda de figuras iguales o congruentes dentro de ciertas configuraciones. Existen algunos criterios que aseguran la congruencia de triángulos.

Teorema: Dados dos triángulos ABC y $A'B'C'$ los siguientes 3 son criterios para determinar si son congruentes:

- *(LAL) Si* $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ *y* $\angle BAC = \angle B'A'C'$.
- *(ALA) Si* $\angle CBA = \angle C'B'A'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ *y* $BC = B'C'$.
- *(LLL) Si* $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ *y* $BC = B'C'$

Adicional a esto también es muy útil identificar cuando ciertas figuras son de la misma forma salvo el tamaño, o en otras palabras semejantes. Para esto existen los siguientes resultados.

Teorema: Sean X, Y , Z tres puntos sobre una recta y X', Y', Z' puntos sobre otra recta. Supongamos que los segmentos XX' y ZZ' son parelelos. Entonces el segmento YY' es paralelo a estos últimos si y sólo si

$$\frac{XY}{YZ} = \frac{X'Y'}{Y'Z'}$$

Entrenamiento Geometría
Israel Bonal Rodríguez
israel.bonal@cimat.mx
6 de Agosto de 2020

Teorema: Dados dos triángulos ABC y $A'B'C'$ los siguientes 3 son criterios para determinar si son semejantes:

- *(LAL) Si* $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ *y* $\angle BAC = \angle B'A'C'$.
- *(AA) Si* $\angle CBA = \angle C'B'A'$ *y* $\angle ACB = \angle A'C'B'$.
- *(LLL) Si* $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitagoras es uno de los resultados mas famosos de la geometría euclidiana y esta muy relacionado con las nociones de medición de longitudes en muchos problemas.

Teorema: Sea ABC un triángulo. Entonces se cumple que $\measuredangle CBA = 90°$ si y sólo si

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

Ejemplos

1. Consideramos un cuadrilátero convexo $ABCD$ y sea P el punto de intersección de AC y BD. Si sabemos que $\measuredangle BPC = \alpha$, entonces el área del cuadrilátero $ABCD$ es igual a
$$\frac{AC \cdot BC \cdot \text{sen}(\alpha)}{2}$$
2. Sea ABC un triángulo y M el punto medio del lado BC. Muestra que los puntos X sobre la recta AM son los únicos que satisfacen que
$$(ABX) = (CAX)$$
3. Muestra que las medianas de un triángulo concurren en un punto llamado Gravicentro del triángulo.
4. Sobre los lados AB y AC de un triángulo ABC se construyen hacia afuera los cuadrados $ABNM$ y $CAPQ$. Muestra que $MC = BP$.
5. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Sobre los lados AB y AD se dibujan los triángulos equiláteros ABF y ADE, respectivamente. Demuestra que el triángulo FCE es equilátero.
6. Sobre los lados de un triángulo ABC se construyes triángulos equiláteros exteriormente. Muestra que el gravicentro del triángulo ABC está a la misma distancia de los centros de cada uno de los tres equiláteros.

7. Dos circunferencias del mismo radio R son tangentes exteriormente entre si y tangentes a una misma recta. Una pequeña circunferencia entre las dos circunferencias y la recta es tangente a estos tres objetos. Encuentra el radio de dicha circunferencia.

8. Dados cuatro puntos A, B, C, D, muestra que los segmentos AB y CD son perpendiculares si y sólo si
$$AC^2 - CB^2 = AD^2 - DB^2$$

Problemas

1. Muestra que la suma de las distancias desde cualquier punto interior de un triángulo equilátero a cada uno de sus lados es igual al valor de su altura.

2. A través de cierto punto tomado dentro de un triángulo, se han trazado tres rectas paralelas a sus lados. Estas rectas dividen el área del triángulo en seis partes, tres de las cuales son triángulos con áreas iguales a S_1, S_2 y S_3. Hallar el área del triángulo dado en términos de estos números.

3. Muestra que las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre si.

4. Muestra que para cualquier número entero n se puede dividir cualquier segmento en n segmentos iguales, usando regla y compás.

5. Demuestra que el segmento de linea, que une los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrilátero, bisecta el segmento de línea que une los puntos medios de las diagonales.

6. Sobre los lados AB y AC de un triángulo ABC se construyen hacia afuera los cuadrados $ABNM$ y $CAPQ$. Sea D el punto medio del lado BC. Demuestra que $PM = 2 \cdot AD$.

7. Sea Z un punto sobre el lado AB de un triángulo ABC. Una línea a través de A paralela a CZ intersecta a BC en X. Una línea a través de B paralela a CZ intersecta a AC en Y. Demuestra que:
$$\frac{1}{CZ} = \frac{1}{AX} + \frac{1}{BY}$$

8. Sea P un punto en el interior del rectángulo $ABCD$. Si $PA = 3$, $PC = 5$ y $PD = 4$, encuentra el valor de PB.

9. Demuestra que la suma de los cuadrados de las dos diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de los cuatro lados.

10. En una circunferencia de radio R está trazado un diámetro y sobre éste se toma el punto A a una distancia d de su centro. Hallar el radio de la circunferencia que es tangente al diámetro en el punto A y es tangente interiormente a la circunferencia dada.